

La candela

Nella penultima puntata, uscita nel n. 2 di quest'anno, mi sono impegnato a concludere con questa la mia lunga serie (7 puntate in due anni) dedicata ai buchi neri. In realtà quegli “oggetti misteriosi” (attributo per loro quantomai opportuno) hanno fatto la loro timida comparsa solo nella precedente puntata, di cui vi riassumo ora i punti essenziali.

Ho in primo luogo chiarito che la particolare soluzione di Schwarzschild delle equazioni di Einstein, nella forma dovuta a Hilbert, corrisponde a qualcosa di realizzabile in determinate condizioni, come fase finale dell'evoluzione di certe stelle (quelle di massa sufficientemente grande: questo non l'avevo detto). È il principale risultato del lavoro di Oppenheimer e Snyder del 1939.

Ho fatto un cenno veloce all'esistenza di un *orizzonte*, che delimita una regione di spazio con una singolare proprietà: l'orizzonte può essere attraversato solo dall'esterno verso l'interno, ma non viceversa. Ho mantenuto per il raggio dell'orizzonte la notazione α di Schwarzschild; ho ricordato che il valore di α è proporzionale alla massa collassata, e che per la massa del Sole $\alpha \simeq 3$ km.

Ho richiamato il *teorema di Birkhoff* (1923) che ci assicura che in condizioni di simmetria sferica, in una regione vuota di materia (per es. all'esterno di una stella, ma non solo) lo spazio-tempo è sempre quello di Schwarzschild. Sarà così all'esterno del Sole, o di una nana bianca, o di una stella di neutroni; ma sarà ancora così durante il collasso di una stella; e anche dopo, anche quando il collasso avrà dato origine a un buco nero col suo orizzonte.

Una conseguenza importante è che se una stella avesse un sistema planetario, e andasse incontro al collasso gravitazionale, i pianeti *non se ne accorgerebbero*. Perché dico questo? e come va inteso? Chiariamo.

* * *

Abbiamo già visto (puntata 70, uscita nel gennaio 2011) che la relatività generale permette di calcolare le leggi del moto dei pianeti, che risultano quasi esattamente quelle di Keplero (il “quasi” si riferisce alla piccola precessione del perielio). Non ho detto niente, per ovvie ragioni, di come si fa il calcolo, né lo farò ora. Solo una cosa mi è necessaria: chiarire che il problema si divide in due parti. La prima consiste nel trovare la soluzione delle equazioni di Einstein, cosa che — come sappiamo — fu risolta da Schwarzschild nel 1916; la seconda nel calcolare il moto di un pianeta, cosa che si può fare, con un procedimento che non posso spiegare, facendo soltanto uso della metrica valida per quella particolare soluzione.

A questo punto un lettore attento (dovrebbe essere davvero attentissimo e dotato di ottima memoria) potrà sollevare un dubbio: “Fermo là! Ci hai

detto che Einstein arrivò alla precessione del perielio alla fine del 1915, e poi che la soluzione di Schwarzschild delle equazioni fu resa pubblica nel 1916 [per la cronaca, dallo stesso Einstein, il 16 gennaio]. Ora ci dici che per calcolare la precessione bisogna conoscere la metrica, ossia bisogna aver risolto le equazioni, cosa che alla fine del 1915 Einstein non sapeva ancora fare: come la mettiamo?” In realtà la faccenda appare ancora più confusa se si aggiunge che nel momento in cui calcolò la precessione (18 novembre 1915) Einstein non aveva neppure trovato la forma corretta delle sue equazioni, alla quale arrivò una settimana dopo. . .

La spiegazione è che la forma delle equazioni che Einstein aveva scritto a quella data non era giusta in generale, ma lo era nello spazio vuoto, all'esterno del Sole, dove si muovono i pianeti. Sull'altro problema (come poté Einstein calcolare la precessione del perielio, se non conosceva la soluzione delle sue equazioni?) ho in realtà già risposto in anticipo un anno fa, nella puntata n. 72, uscita nel n. 3: dato che non riteneva possibile dare una soluzione semplice delle equazioni, Einstein ricorse a un procedimento approssimato, che era del tutto adeguato per le condizioni valide attorno al Sole (non lo sarebbe stato attorno a una stella di neutroni, o peggio per un buco nero . . .).

* * *

Ciò detto, il teorema di Birkhoff implica che la metrica, e quindi anche il moto dei pianeti, sono gli stessi attorno a una stella a simmetria sferica di data massa, quali che siano le dimensioni della stella, e perfino se questa si contrae (mantenendo invariata la massa). Ne segue anche che è falsa l'immagine che circola in chi ha letto la (cattiva) divulgazione, dei buchi neri come delle specie di “mostri” che inghiottono tutto ciò che gli si trova vicino: in realtà un corpo potrebbe benissimo orbitare attorno a un buco nero, a patto solo di restare fuori dell'orizzonte.

Però. . . Qualche precisazione è necessaria, anche se mi obbliga ad allungare il discorso. In primo luogo, riflettiamo sulla fase di formazione di un buco nero. Questo non è un processo lento e graduale: il modo più frequente è l'esplosione di una supernova, in cui gran parte di una stella di grande massa viene espulsa all'esterno, e il suo nucleo centrale viene invece violentemente compresso, fino appunto a formare il buco nero. In tale processo un eventuale sistema planetario verrebbe investito dall'onda dell'esplosione, e i pianeti non resterebbero certo inalterati: per es. eventuali atmosfere sarebbero spazzate via. Se questo accadesse alla Terra, sarebbe la fine della biosfera.

“Se” accadesse . . . ma non accadrà, perché il Sole è troppo piccolo per avere quel destino. Ne avrà un altro, non meno catastrofico per la Terra, anzi di più: tra forse $5 \div 7$ miliardi di anni evolverà in una *gigante rossa*, che si estenderà fino alla distanza del nostro pianeta. A quel punto la Terra cesserà di esistere (insieme con Mercurio e Venere) venendo assorbita nella materia solare.

* * *

Una seconda precisazione riguarda i corpi in orbita attorno a un buco nero. Se questo ha una massa non troppo diversa dal Sole, e il corpo in orbita non si avvicina troppo (fra un momento preciso questo “troppo”) quello che ho detto è vero. Ma se l’orbita è troppo stretta diventano importanti le *forze di marea*, che possono avere un effetto distruttivo.

Ne ho parlato in passato, ma non posso pretendere che qualcuno se ne ricordi: è stato ben 10 anni fa. . . Mi riferisco infatti alle puntate n. 12 (del 1996) e n. 36 (del 2002). Posso solo ricordare il punto essenziale: la forza di marea prodotta per es. dal Sole sulla Terra è dovuta alla differenza di attrazione gravitazionale tra i punti della Terra più vicini al Sole e quelli più lontani. Si tratta di un effetto piccolo, ma capace di produrre il periodico innalzamento e abbassamento del livello del mare. Ricordo anche che di solito si attribuiscono le maree all’azione della Luna, che è in realtà dominante, più che doppia di quella del Sole; ma l’effetto del Sole non è comunque trascurabile, e ora a noi serve di più ragionare su questo.

A quel tempo avevo anche detto che la forza di marea è proporzionale alla massa del corpo che la causa, e inversamente proporzionale al cubo della distanza. La forza è anche proporzionale alle dimensioni del corpo su cui agisce. Vista la dipendenza dal cubo della distanza, s’intuisce che se la distanza è più piccola la forza potrà divenire molto più grande: ma in che consiste quello che ho chiamato “effetto distruttivo”?

Per rispondere occorre ricordare che un pianeta, e anche un piccolo asteroide, è tenuto insieme dalla propria gravità: si parla di “autogravitazione.” È forse intuitivo che questa autogravitazione è più forte per i pianeti grandi che per quelli piccoli, e può essere molto piccola per gli asteroidi o per certi satelliti. Infatti i corpi più grandi, dove l’autogravità è la forza dominante, hanno forma sferica (a parte lo schiacciamento dovuto alla rotazione). E qui mi autocito:

Volendo si potrebbe continuare a scavare in questo gioco di azioni opposte, di effetti e di cause. . . Infatti non è neppure giusto dire che prima c’è il campo gravitazionale, in quanto la forma del campo dipende dalla distribuzione delle masse che lo generano. Il campo terrestre ha andamento pressoché radiale perché la Terra è circa sferica, oppure la Terra è sferica perché il campo è radiale? In realtà le due cose vanno insieme: in assenza di rotazione un aggregato di materia tenuto dalla gravità ha come configurazione di equilibrio (energia minima) quella a simmetria sferica, e in quelle condizioni il campo generato è radiale.

Questo l’ho scritto “solo” quattro anni fa, nel 2008, nella puntata n. 61, dedicata a orizzontale e verticale. Oggi il discorso prende un’altra direzione: supponendo che nel pianeta agisca solo la (auto)gravità, che effetto avrà una forza di marea?

Una prima risposta è ovvia: il pianeta verrà deformato, allungandosi lungo la congiungente pianeta-Sole, e contraendosi nel piano ad essa perpendicolare.

Ma ora siamo interessati al caso estremo in cui la forza di marea diventa molto grande: potrà sovrastare l'autogravità, fino a spezzare il pianeta? Non vi presento i calcoli e sparo il risultato: se indichiamo con M la massa del Sole, con m quella del pianeta, con R la distanza Sole–pianeta e con r il raggio di questo, occorre confrontare due grandezze: $A = M/R^3$ e $a = m/r^3$. Finché A resta sensibilmente minore di a , il pianeta si deforma ma rimane stabile; invece quando A prevale su a il pianeta va in pezzi.

Ora osserviamo che i due parametri A e a dipendono da cose del tutto diverse: A dipende dal Sole, da quanto è grande e da quanto è distante; invece a dipende solo dal pianeta, dal suo raggio e dalla sua massa. Ancora: il parametro a ha un significato fisico semplice, dato che a parte un fattore $4\pi/3$ è il rapporto massa/volume, ossia la *densità media* del pianeta.

Accade allora un fatto paradossale. Supponiamo che il pianeta vada in pezzi: i suoi frammenti potrebbero costituire due o più pianeti più piccoli, di minori masse e minori raggi, ma la loro densità media sarà poco diversa da quella del pianeta padre. E se il criterio per la stabilità ($A < a$) non era soddisfatto per il padre, non lo sarà neppure per i figli, che quindi dovranno a loro volta frammentarsi . . . e così via. All'infinito? O magari fino a ridursi a singoli atomi? Penso che abbiate già intravisto la risposta. . .

* * *

In realtà la frammentazione termina molto prima della scala atomica: termina quando non è più vera l'ipotesi che si è fatta all'inizio, ossia che nel pianeta sia presente solo l'autogravità come forza che lo tiene insieme. Sappiamo che ciò è vero per corpi abbastanza grandi, ma sappiamo anche che i piccoli asteroidi e satelliti (per es. quelli di Marte) sono sotto quelle dimensioni, e infatti possono avere forme anche bizzarre, tutt'altro che sferiche. Si tratta di corpi che stanno insieme grazie a forze che vengono chiamate “di stato solido,” e non sono altro che i legami atomici e molecolari che tengono insieme qualunque corpo solido, anche di piccole dimensioni. Il fatto è che le forze di stato solido vanno (il termine del gergo astrofisico è “scalano”) come una potenza diversa dall'autogravità, e questo fa sì che diventino dominanti per corpi piccoli.

Vogliamo provare ad andare un pochino più a fondo? Per calcolare l'autogravità, ragioniamo così: immaginiamo di dividere un pianeta sferico in due semisfere, e calcolare (all'ingrosso) la forza di gravità tra le due semisfere. Se pensiamo alle masse $m/2$ delle semisfere, poste a distanza pari al raggio r , la forza sarà data all'incirca da $G(m/2)(m/2)/r^2 = (Gm^2)/(4r^2)$. Dato che m è proporzionale a r^3 , la forza risulta proporzionale a r^4 . Per inciso, anche la forza di marea, che come sappiamo è proporzionale a m e a r , va con la stessa potenza r^4 .

Per stimare la forza di stato solido, teniamo presente che questa agisce solo tra atomi immediatamente vicini: possiamo quindi calcolarla pensando solo alla superficie che separa le due semisfere. È ovvio che la forza sarà proporzionale

all'area, quindi a r^2 . Questo basta per essere certi che al diminuire di r la forza di stato solido, che decresce solo come il quadrato del raggio, finirà per diventare preponderante sulla forza di marea, che decresce come la quarta potenza.

È ora necessario trasformare le affermazioni che ho appena fatto in stime quantitative: in generale per un fisico “piccolo”, “preponderante” sono espressioni troppo vaghe e ambigue, che possono essere accettate quando i presupposti sono chiari e soprattutto quando si parla fra gente del mestiere. Viceversa, in ambito divulgativo (e quindi anche in questa rubrica) li ritengo poco consigliabili, perché possono indurre in confusione o trasmettere un'idea sbagliata del modo di ragionare del fisico. Ecco un cenno sommario del procedimento e il risultato che ho ottenuto (e che spero sia corretto, ricordando comunque che si tratta di una stima, che può dare solo poco meglio che l'ordine di grandezza).

L'idea è di confrontare la forza di marea con la forza di stato solido per un corpo in orbita attorno a una stella o a un buco nero. Sulla forza di marea ho già detto qualcosa; una stima quantitativa è $GMmr/R^3$ (e scusate se non spiego in dettaglio come ci si arriva). Va quindi come r^4 per un corpo di fissata densità (per es. un pezzo di roccia). La forza di stato solido si ricava dal “carico di rottura per trazione” K di quella roccia (che si trova tabulato) e dall'area della sezione del corpo: vale quindi $\pi r^2 K$. Da qui si vede che il rapporto tra le due forze va come r^2 . A conti fatti, assunto un valore tipico per K (10^7 Pa), per una stella (o buco nero) di massa pari al Sole trovo un dato valore per il rapporto r^2/R^3 : $1.9 \cdot 10^{-17}$ in unità SI.

Esempi: se il corpo orbita a 1000 km dalla stella (che per consentire un raggio orbitale così piccolo potrà essere solo una stella di neutroni o un buco nero) mi risulta $r \simeq 4$ m. Se lo portiamo a 10 km il suo raggio massimo si riduce a 4 mm. Se poi aggiungiamo che il corpo potrebbe trovarsi anche più vicino, e anche cadere oltre l'orizzonte, si vede che verrà comunque ridotto letteralmente in briciole: ecco che cosa significa che un buco nero ha un effetto distruttivo...

* * *

Ora che abbiamo preso un po' di familiarità coi buchi neri, dobbiamo esaminare la questione principale: è possibile “vederli”? Le virgolette stanno a indicare che si tratterà di un “vedere” molto indiretto, per definizione: infatti abbiamo già visto che niente può attraversare l'orizzonte verso l'esterno. (Nep-pure la luce... questo non l'avevo detto, e non è facile spiegarlo in poche parole, purtroppo.) Ne segue che nessun segnale, informazione o materia visibile può arrivarci direttamente da un buco nero... eppure qualche modo, sia pure indiretto, per inferirne l'esistenza l'abbiamo, e ora voglio parlarne brevemente.

Supponiamo che il nostro buco nero (residuo di una supernova) faccia parte di un sistema binario; abbia cioè una stella compagna, legata gravitazionalmente, e che questa sia una stella “normale.” Tra le due stelle agiranno delle forze di marea, che avranno effetto sulla compagna deformandola, come sappiamo. Nel caso che le due stelle siano abbastanza vicine, questa deformazione può arrivare

fino a “strappare” della materia alla stella compagna, e questa materia potrà avvicinarsi al buco nero, in un primo tempo restando in orbita attorno a questo. Si formerà quindi attorno al buco nero un “disco di accrescimento.” (Noterella linguistica: “accrescimento” è la traduzione più usata dell’inglese “accretion,” che però a me non pare tanto corretta: preferirei per es. “accumulo.”)

Però la materia (gassosa) che forma il disco è inevitabilmente soggetta a effetti dissipativi: detto alla buona, per attrito interno del gas. Andrà quindi perdendo energia, avvicinandosi all’orizzonte e aumentando velocità.

Una piccola parentesi di meccanica classica: non sembri contraddittorio che una diminuzione di energia vada insieme con un aumento di velocità: l’energia ha una parte cinetica, che va come il quadrato della velocità, e una parte potenziale (gravitazionale) che va come $1/r$ ma è negativa. Si può dimostrare che in quelle condizioni una diminuzione ΔE dell’energia totale corrisponde a una diminuzione doppia ($2 \Delta E$) dell’energia potenziale, e a un uguale incremento ΔE dell’energia cinetica. La materia del disco va quindi aumentando velocità, e gli urti fra le molecole che la compongono trasformano parte di questa energia in energia di agitazione termica: esattamente la parte ΔE che mancherebbe per far conservare l’energia. Dunque il gas aumenta di temperatura, e come ogni corpo caldo emette radiazione elettromagnetica che noi possiamo vedere.

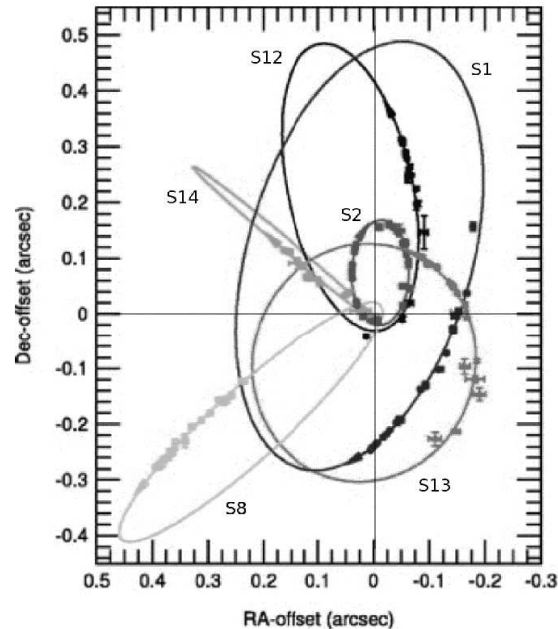
Il fenomeno dei dischi di accrescimento è comune nei sistemi binari; quello che caratterizza i buchi neri è la temperatura che il gas può raggiungere: così alta che la radiazione emessa raggiunge la banda dei raggi X. Abbiamo così una “sorgente X.” Oggi si ritiene che non tutte le sorgenti X che si possono osservare abbiano questa origine, ma che alcune siano molto probabilmente dischi di accrescimento attorno a buchi neri.

* * *

Un altro tipo di buchi neri ha a che fare coi “nuclei galattici.” Sono noti da tempo i cosiddetti “nuclei galattici attivi”; in questa categoria gli oggetti più noti sono i cosiddetti “quasars” (quasi stellar radio source). Oggi si ritiene che quasi tutte le galassie, anche quelle che non hanno nuclei attivi, abbiano al centro un buco nero di massa molto grande (milioni di volte quella del Sole); ma non voglio dire di più, anche perché le mie conoscenze in materia sono limitate. Voglio invece soffermarmi su una scoperta degli ultimi 20 anni, che concerne il centro della nostra stessa Galassia, dove ci sono oggi indicazioni assai forti della presenza di un buco nero supermassivo.

Il centro della Galassia non può essere osservato nel campo della luce visibile, a causa di una quantità di materia in forma di polvere che assorbe fortemente in questa banda. È però noto da tempo che lì esiste una “radiosorgente,” denominata “Sgr A*” (Sgr sta per “Sagittario,” la costellazione dove si trova il centro della Galassia). Si tratta di una sorgente piccola su scala galattica (più piccola dell’orbita della Terra) ma questo non è ancora niente, rispetto a quello che è apparso dalle osservazioni nell’infrarosso.

Per questa via si sono scoperte delle stelle “comuni,” delle quali è stato possibile seguire per anni il moto. Si è così visto che alcune di queste stelle sono in orbite ellittiche attorno a un punto dove non c’è niente di visibile: dalle dimensioni e dal periodo di queste orbite si è potuta determinare la massa del centro di attrazione, che risulta intorno a $4.2 \cdot 10^6$ masse solari. La figura qui accanto⁽¹⁾ mostra alcune orbite. In particolare, la stella indicata con S2 ha un periodo di circa 15 anni e una distanza minima dal centro di 120 UA. La massa che attrae la stella deve avere quindi al più dimensioni di 100 UA all’incirca.



Sempre per il solito lettore attentissimo, si vede in alcuni casi (specialmente S1 e S2) che il punto indicato come centro di attrazione non sta in un fuoco dell’ellisse, anzi non sta neppure sull’asse maggiore: come mai? La spiegazione è che quelle orbite stanno in un piano obliquo rispetto alla direzione di osservazione, e quando si proietta obliquamente un’ellisse, la curva rimane sempre un’ellisse ma i suoi fuochi non si conservano.

La cosa interessante è che non si sanno immaginare altre concentrazioni stabili di una massa così grande in uno spazio così piccolo, se si esclude un buco nero.

Per completezza, accenno anche che il centro attorno al quale orbitano le stelle non coincide con la radiosorgente SgrA*: si ritiene che questa sia formata da materia che è in corso di cattura dal buco nero.

Riassumendo, ho accennato a diverse evidenze sperimentali in favore dell’esistenza di buchi neri:

- le sorgenti X, di cui si conoscono molti casi
- i nuclei attivi delle galassie
- le stelle che al centro della nostra Galassia orbitano attorno a una massa di oltre 4 milioni di masse solari, concentrata in un volume assai piccolo.

È ora chiaro perché avevo parlato di un vedere molto indiretto... Ma non bisogna dimenticare che in tutti i campi della scienza succede la stessa cosa: quanto più ci si allontana dal nostro ambiente, nello spazio o nel tempo, verso il piccolo o verso il grande, tutte le nostre costruzioni si basano necessariamente su evidenze sempre più indirette, ottenute con l’intermediazione di strumenti e di

argomentazioni teoriche sempre più complesse e sofisticate. È vero per la fisica (in particolare per l'astrofisica e la cosmologia) come per la biologia o la geologia. Quindi non c'è niente di scandaloso o di contestabile nelle evidenze sui buchi neri. Solo che in questo come in tutti gli altri casi la nostra fiducia nelle conoscenze che ricaviamo per vie così indirette abbisogna, per diventare più credibile, del maggior numero possibile di "riscontri" (per usare un termine del linguaggio giudiziario).

* * *

Arrivati finalmente alla fine di questa lunga storia, è il momento di voltarsi a guardare indietro, per rispondere alla domanda centrale: sono riuscito a "spiegare" che cosa sono i buchi neri? La mia risposta più o meno ve l'aspettate: ho raccontato molte cose, sulla storia della RG oltre che sugli sviluppi che hanno gradatamente portato alla costruzione dell'idea di buco nero. Però ho dovuto, in parecchi punti, sorvolare su questioni troppo complesse dal punto di vista matematico; ho dovuto spesso semplificare anche i ragionamenti fisici; sono ricorso qua e là ad analogie e a metafore che più volte ho anche segnalato come pericolose, pur non potendo farne a meno. . .

Qualche esempio di questioni anche importanti che ho tralasciato:

1. Ho parlato solo dei "buchi neri di Schwarzschild," ossia a simmetria sferica, che potrebbero avere origine solo da stelle prive di momento angolare. Però la più gran parte delle stelle invece ruotano, e perciò se collassano in un buco nero danno luogo a una struttura ben più complicata, con un orizzonte e una geometria dello spazio-tempo che non è minimamente possibile descrivere al livello al quale mi sono dovuto attenere.
2. Non ho detto niente sulla "singolarità" che c'è al centro di un buco nero; il che tra l'altro, anche se lo si dice spesso, è in realtà sbagliato, perché la singolarità sta piuttosto *nel futuro*. Anche qui, non potevo permettermi di entrare nel merito, per la solita ragione.
3. La soluzione di Schwarzschild sulla quale vi ho intrattenuti rappresenta in realtà un caso *statico*, nel senso che corrisponde piuttosto a un buco nero che esista *ab eterno* che a uno prodotto dal collasso di una stella. Nel secondo caso solo parte dello spazio-tempo è descritto dalla soluzione di Schwarzschild, mentre un'altra parte (quella dove è presente la materia stellare) ha caratteristiche diverse, e va "raccordata" con la soluzione nel vuoto. Come si fa questo? Non ho neppure sfiorato la questione.

Pur con tutte queste omissioni, un inconveniente non da poco è stata la lunghezza stessa dell'esposizione, più adatta in realtà a un libro che a una serie di articoli. Ma libro o articoli, la lunghezza implica una seria difficoltà per chi voglia tenere il filo del discorso, ed è il motivo per cui tanti scritti di divulgazione sono ben più sbrigativi. Quanti dei miei lettori avranno avuto la costanza di seguirmi, non posso proprio immaginarlo; tanto meno so dire se sarò riuscito a

farmi capire, dove il “farmi capire” esprime due esigenze opposte: da un lato non essere così complicato da riuscire incomprensibile, dall’altro non essere invece troppo semplice, a rischio di fraintendimenti.

Nella puntata iniziale, oltre due anni e mezzo fa, scrivevo:

In realtà è quasi certo che la puntata non basterà, e al tempo stesso avremo occasione di affrontare un tema che va al di là del ristretto campo della fisica: che cosa può significare, e se sia davvero possibile, fare divulgazione scientifica seria.

Ora si può vedere che il “quasi certo” era una massiccia sottovalutazione della complessità dell’impresa a cui mi accingevo; e quanto al poter fare divulgazione scientifica “seria,” ora posso dire che forse sarò riuscito a spiegare a chi mi legge che cosa intendo con quell’aggettivo. Sulla possibilità ho invece almeno gli stessi dubbi che avevo all’inizio, e non so se mi è riuscito di trasmetterli a voi; o se al contrario non vi ho convinti che sono io ad avere delle pretese irragionevoli. . .

Qualunque sia il vostro responso, ora il lavoro è concluso, e nelle prossime puntate parleremo d’altro; anche per togliere un po’ dal centro dei miei discorsi le questioni di fisica, come in fondo avevo promesso fin dalla prima puntata, oltre venti anni fa.

⁽¹⁾ Adattata da: Eisenhauer *et al*, *The Astrophysical Journal*, **628** (2005) p. 246.