E. Fabri *luglio 2020*

Il metodo di Fock per l'atomo d'idrogeno*

Impostazione del calcolo

L'equazione di Schrödinger nello spazio degli impulsi si scrive [1]

$$\frac{p^2}{2\mu}\,\varphi(\vec{p}) - \frac{e^2}{\pi h}\int \frac{d\vec{p}\,'}{|\vec{p}-\vec{p}\,'|^2}\,\varphi(\vec{p}\,') = E\,\varphi(\vec{p}). \tag{1}$$

Poniamo $p_0^2 = -2\mu E$:

$$(p^2 + p_0^2)\,\varphi(\vec{p}) = \frac{\hbar}{\pi^2 a_0}\int \frac{d\vec{p}\,'}{|\vec{p}-\vec{p}\,'|^2}\,\varphi(\vec{p}\,') \tag{2}$$

dove $a_0 = \hbar^2/(m\,e^2)$ è il raggio di Bohr.

Nota: In `Fock.tex` c'è un errore nella costante che moltiplica l'integrale. Non so se mio o di Fock.

Eseguiamo la trasf. di coordinate

$$\vec{\xi} = \frac{2\,p_0\,\vec{p}}{p_0^2 + p^2} \qquad \xi_0 = \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2 + p^2}. \tag{3}$$

Proprietà della trasf. (3)

Per prima cosa osserviamo che

$$\xi_\mu\,\xi^\mu = 1. \tag{4}$$

La (4) mostra che le ξ sono coordinate (ridondanti) sulla sfera S^3 di raggio 1 in $\mathbb{R}^4$, dove si è assunta la consueta metrica euclidea. Di conseguenza gli indici greci si alzano e abbassano col tensore metrico $\delta_{\lambda\mu}$. Coord. non ridondanti sono le componenti di $\vec{\xi}$ o anche le coord. angolari definite più avanti.

Ecco alcune relazioni utili:

$$p^2 = \frac{1-\xi_0}{1+\xi_0}\,p_0^2 \qquad p^2 + p_0^2 = \frac{2\,p_0^2}{1+\xi_0} \qquad \vec{p} = \frac{p_0\,\vec{\xi}}{1+\xi_0} \tag{5}$$

$$|\vec{p}-\vec{p}\,'|^2 = \frac{p_0^2\,\Delta^2}{(1+\xi_0)(1+\xi_0')} \tag{6}$$

con

$$\Delta^2 = (\xi_\mu - \xi_\mu')(\xi^\mu - \xi'^\mu). \tag{7}$$

---

* La prima versione, dicembre 2007, è la trascrizione fedele della versione originaria manoscritta, presumibilmente dei primi anni '70. La presente versione contiene delle aggiunte esplicative e qualche cambio di notazione.

[1] W. Fock, *Z. Physik* **98** (1935), 45.

Lo jacobiano di $\vec{p}$ rispetto a $\vec{\xi}$ è

$$\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{\xi}} \right\| = \frac{p_0^3}{\xi_0 (1+\xi_0)^3}. \tag{8}$$

e l'integrale a secondo membro della (2) diventa

$$p_0\,(1+\xi_0) \int \frac{d\vec{\xi}'}{\xi_0'\,(1+\xi_0')^2\,\Delta^2}\,\varphi(\vec{p}')$$

Introduciamo coord. angolari α, ϑ, φ sulla sfera. Abbiamo

$$\xi_0 = \cos\alpha \quad \xi_1 = \sin\alpha\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \quad \xi_2 = \sin\alpha\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \quad \xi_3 = \sin\alpha\,\cos\vartheta$$

e per l'elemento di volume:

$$d\vec{\xi} = \xi_0\,d\Omega$$

essendo $d\Omega$ l'elemento di angolo solido nella coord. angolari.

Ne segue che la (2) si scrive

$$\varphi(\vec{p}) = \frac{\hbar\,(1+\xi_0)^2}{2\pi^2 a_0\,p_0} \int \frac{d\Omega'}{(1+\xi_0')^2\,\Delta^2}\,\varphi(\vec{p}')$$

o anche

$$\Phi(\xi) = \frac{\hbar}{2\pi^2 a_0\,p_0} \int \frac{d\Omega'}{\Delta^2}\,\Phi(\xi') \tag{9}$$

avendo posto

$$\Phi(\xi) = \frac{\varphi(\vec{p})}{(1+\xi_0)^2}$$

(non ci curiamo della normalizzazione).

La (9) è invariante per SO(4) e perciò avrà autovalori degeneri. L'invariante di Casimir

$$-\tfrac{1}{2}\,(\xi_\mu\partial_\nu - \xi_\nu\partial_\mu)(\xi_\mu\partial_\nu - \xi_\nu\partial_\mu) = -\partial_\mu\partial_\mu + \xi_\mu\partial_\mu(\xi_\mu\partial_\mu + 2)$$

ha autovalori n^2-1 ($n = 1, 2, \ldots$). Prolungando la Φ in modo che sia armonica, si trova

$$\Box^2\Phi = 0, \qquad \xi_\mu\partial_\mu(\xi_\nu\partial_\nu + 2)\,\Phi = (n^2-1)\,\Phi$$

cioè

$$\xi_\mu\partial_\mu\Phi = n-1 \text{ oppure } -(n+1)$$

cioè Φ omogenea di grado $n-1$ oppure $-(n+1)$. Scelgo la prima, che è regolare nella sfera. Allora risulta, mediante opportuna funzione di Green:

$$\Phi(\xi) = \frac{n}{2\pi^2} \int \frac{d\Omega'}{\Delta^2}\, \Phi(\xi')$$

e confrontando:

$$p_0 = \frac{k^2 \mu^2}{n}.$$

Introducendo coordinate polari α, ϑ, φ, e ponendo

$$\Phi = \Pi_{nl}(\alpha)\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

si ottiene dall'espressione di $\Box^2$

$$\Box^2 = \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} r^3 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \sin^2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{r^2 \sin^2\alpha \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\alpha \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

l'equazione differenziale per Π_{nl}:

$$\left(1 - x^2\right) \Pi''_{nl} - 3\, x\, \Pi'_{nl} + \left(n^2 - 1 \frac{l(l+1)}{1 - x^2}\right) \Pi_{nl} = 0.$$

Facendo $\Pi_{nl} = \sqrt{1 - x^2}\, Q_{nl}$

$$\left(1 - x^2\right) Q''_{nl} - (2l + 3)\, x\, Q'_{nl} + \left[n^2 - (l+1)^2\right] Q_{nl} = 0$$

che è soddisfatta da

$$Q_{nl} = \frac{d^l}{dx^l}\, U_{n-1}(x)$$

dove U_n è il polinomio di Chebyschev di 2° tipo.

Perciò

$$\Pi_{nl}(\alpha) = A_{nl}^{-1/2} \sin^l\alpha\, U_{n-1}^{(l)}(\cos\alpha) = A_{nl}^{-1/2} \sin^l\alpha \frac{d^{\,l}}{d\cos\alpha^{\,l}} \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

La costante A_{nl} dipende dalla normalizzazione. Se si vuole $\int d\Omega\, |\Phi|^2 = 1$ si trova

$$A_{nl} = \frac{\pi}{2}\, (n^2 - 1) \cdots (n^2 - l^2) \quad \text{se } l > 0; \qquad A_{n0} = \frac{\pi}{2}.$$