E. Fabri *maggio 2019*

Invarianza SO(4) dell'atomo d'idrogeno

Scopo e primi passi

Voglio ricostruire il ruolo di SO(4) negli stati e livelli dell'atomo d'idrogeno. Resto nell'approssimazione non relativistica e senza spin. La hamiltomiana si scrive

$$H = \frac{1}{2m}\,p^2 - \frac{e^2}{q}. \tag{1}$$

Il momento angolare è

$$\mathbf{J} = \mathbf{q} \times \mathbf{p} \tag{2}$$

e il vettore di Lenz

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{1}{2\,m}\,(\mathbf{p} \times \mathbf{J} - \mathbf{J} \times \mathbf{p}) - e^2\,\frac{\mathbf{q}}{q} \\ &= \frac{1}{m}\,(\mathbf{p} \times \mathbf{J} + i\,\hbar\,\mathbf{p}) - e^2\,\frac{\mathbf{q}}{q} \end{aligned} \tag{3}$$

Si sa che $\mathbf{J}$ e $\mathbf{L}$ sono costanti del moto:

$$[H, \mathbf{J}] = [H, \mathbf{L}] = 0.$$

Relazioni di commutazione

Il commutatore delle componenti di $\mathbf{J}$ è noto:

$$[J_i, J_j] = i\,\hbar\,\varepsilon_{ijk} J_k. \tag{4}$$

Anche $[J_i, L_j]$ è noto:

$$[J_i, L_j] = i\,\hbar\,\varepsilon_{ijk} L_k. \tag{5}$$

Non è semplice ricavare

$$[L_i, L_j] = -i\,\varepsilon_{ijk}\,J_k\,\frac{2\,\hbar}{m}\,H \tag{6}$$

(magari esiste una derivazione semplice, ma non la conosco). Questa, confrontata con le (4) ed (5), suggerisce di definire

$$\mathbf{K} = \sqrt{\frac{m}{2}}\,(-H)^{-1/2}\,\mathbf{L} \tag{7}$$

(ovviamente lecita solo nel sottospazio degli autovalori discreti di H, dove H è definito negativo). Allora l'insieme delle relazioni di commutazione diventa, in aggiunta alla (4)

$$[J_i, K_j] = i\,\hbar\,\varepsilon_{ijk} K_k \qquad [K_i, K_j] = i\,\hbar\,\varepsilon_{ijk} J_k. \tag{8}$$

Le (4), (8) definiscono l'algebra di Lie di SO(4), che quindi è gruppo d'invarianza di H.

Si noti che quest'invarianza, a differenza di quella SO(3) che ne è un sottogruppo, non si può interpretare come una trasf. di coordinate, a causa della comparsa di $\mathbf{q}$ accanto a $\mathbf{p}$ nella definizione di $\mathbf{K}$, da cui segue che i generatori K_i agiscono su $\mathbf{p}$ oltre che su $\mathbf{q}$. In altri termini, abbiamo un'invarianza della hamiltoniana ma non della lagrangiana (rispetto a una trasf. delle sole q_i).

Rappresentazioni di SO(4)

Conviene definire

$$\mathbf{M}^+ = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{J} + \mathbf{K}) \qquad \mathbf{M}^- = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{J} - \mathbf{K}).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
[M_i^+, M_j^+] &= \tfrac{1}{4}\,([J_i, J_j] + [J_i, K_j] + [K_i, J_j] + [K_i, K_j]) \\
&= \frac{i}{4}\,\hbar\,\varepsilon_{ijk}\,(J_k + K_k + K_k + J_k) = i\,\hbar\,\varepsilon_{ijk}\,M_k^+ \\
[M_i^-, M_j^-] &= \tfrac{1}{4}\,([J_i, J_j] - [J_i, K_j] - [K_i, J_j] + [K_i, K_j]) \\
&= \frac{i}{4}\,\hbar\,\varepsilon_{ijk}\,(J_k - K_k - K_k + J_k) = i\,\hbar\,\varepsilon_{ijk}\,M_k^- \\
[M_i^+, M_j^-] &= \tfrac{1}{4}\,([J_i, J_j] - [J_i, K_j] + [K_i, J_j] - [K_i, K_j]) = 0.
\end{aligned}$$

Si vede che le componenti di $\mathbf{M}^+$ e quelle di $\mathbf{M}^-$ generano due algebre di Lie di SO(3), $\mathcal{A}^+$, $\mathcal{A}^-$, che commutano tra loro. Quindi le rappresentazioni irrid. dell'algebra $\mathcal{A}$ di SO(4) sono prodotti diretti di rappr. irrid. di queste:

$$\mathcal{D}^{(j^+ j^-)} = \mathcal{D}^{(j^+)} \otimes \mathcal{D}^{(j^-)}.$$

Gli invarianti di Casimir di $\mathcal{A}$ sono due:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{M}^+|^2 &= \tfrac{1}{4}\big(|\mathbf{J}|^2 + |\mathbf{K}|^2 + 2\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{K}\big) \\
|\mathbf{M}^-|^2 &= \tfrac{1}{4}\big(|\mathbf{J}|^2 + |\mathbf{K}|^2 - 2\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{K}\big)
\end{aligned}$$

ovvero

$$|\mathbf{J}|^2 + |\mathbf{K}|^2 \quad \text{e} \quad \mathbf{J}\cdot\mathbf{K}.$$

Però dalle (2), (3) si vede che $\mathbf{J}\cdot\mathbf{K} = 0$, quindi che $|\mathbf{M}^+|^2 = |\mathbf{M}^-|^2$. Ne segue che le sole rappr. ammesse sono quelle $\mathcal{D}^{(j,j)}$ $(j = 0,\ \frac{1}{2}\ \ldots)$, di dimensione $(2j+1)^2$. Essendo

$$\mathbf{J} = \mathbf{M}^+ + \mathbf{M}^-$$

nella rappr. $\mathcal{D}^{(j,j)}$ gli autovalori di $|\mathbf{J}|^2$ sono $l\,(l+1)\,\hbar^2$ con l intero e $0 \le l \le 2\,j$. Quelli di $|\mathbf{M}^+|^2$, $|\mathbf{M}^-|^2$ sono uguali e valgono $j\,(j+1)\,\hbar^2$.

La rappr. $\mathcal{D}^{(j,j)}$ corrisponde a un autovalore degenere di H. Si sa che tali autovalori sono

$$E_n = -\frac{m\,e^4}{2\,n^2\hbar^2}$$

con degenerazione n^2. Quindi $n = 2j+1$ e

$$(2j+1)^2 = -\frac{m\,e^4}{2\,E_n\,\hbar^2}.$$

Ne segue

$$|\mathbf{J}|^2 + |\mathbf{K}|^2 = 4\,j\,(j+1)\,\hbar^2 = [(2j+1)^2 - 1]\,\hbar^2 = -\frac{m\,e^4}{2\,H} - \hbar^2.$$

Usando la (7):

$$|\mathbf{J}|^2 - \frac{m}{2\,H}\,|\mathbf{L}|^2 = -\frac{m\,e^4}{2\,H} - \hbar^2$$

$$|\mathbf{L}|^2 = \frac{2}{m}\,H\left(|\mathbf{J}|^2 + \hbar^2\right) + e^4. \qquad (9)$$