E. Fabri *marzo 2021**

Ignatowski a modo mio

Posizione del problema

Voglio riesporre il risultato di Ignatowski [1] e altri [2]–[4], in una forma che credo più semplice. È ben noto che si tratta di ricavare le trasf. di Lorentz, o ciò che si può dire in proposito, senza assumere l'invarianza della velocità della luce.

Le ipotesi che farò sono:

1: lo spazio è omogeneo e isotropo

2: il tempo è omogeneo

3: vale il principio di relatività (PR).

Commentiamo. La 1 può essere riformulata

$1'$: Si ha invarianza per traslazioni e rotazioni spaziali (gruppo euclideo E^3).

La 2:

$2'$: Si ha invarianza per traslazioni temporali.

La 3 esprime la completa equivalenza fisica di tutti i rif. inerziali (RI).

I riferimenti K e K′

Introdurrò due RI, K e K′. In base a 3 ha senso assumere in K e K′ campioni di lunghezza e tempo *equivalenti*, ossia costruiti con lo stesso procedimento (es. orologi atomici al ^{133}Cs).

Sceglierò in K, K′ due sistemi di coordinate (SC) come segue:

– Le origini spazio-temporali coincidono.
– Gli assi x, x' sono diretti come la velocità $\vec{v}$ di K′ rispetto a K e orientati in modo che sia $v > 0$. Ne segue che la velocità $\vec{v}'$ di K rispetto a K′ ha verso opposto a $\vec{v}$, ma che abbiano lo stesso modulo va dimostrato.
– Gli assi y, y' sono paralleli e concordi; di conseguenza lo stesso è vero per z, z'.

Con queste scelte contano solo le velocità scalari v, v': $v > 0$, $v' < 0$. Le rispettive leggi orarie di K e K′ sono:

$$\begin{aligned} x &= vt \text{ per O}' \text{ rispetto a K} \\ x' &= v't' \text{ per O rispetto a K}'. \end{aligned} \tag{1}$$

Si dà comunemente per ovvio che sia $v' = -v$, ma la cosa va dimostrata. Lo faremo più avanti.

* L'originale del febbraio 2016 è stato rielaborato nel luglio 2018. La presente versione è un'ulteriore profonda rielaborazione.

La legge di trasformazione: primo passo

La cercata legge di trasformazione esprimerà, per un dato evento, le sue coordinate (t, x, y, z) rispetto a K come funzioni di quelle (t', x', y', z') rispetto a K$'$, e viceversa.

L'invarianza per traslazioni spaziali e temporali, insieme al PR e in particolare al carattere inerziale di entrambi i rif., impone che un qualsiasi moto rettilineo uniforme rispetto a K lo sia anche rispetto a K$'$. Geometricamente, che qualunque [?] retta dello spazio $\mathbb{R}^4(t, x, y, z)$ venga trasformata in una retta in $\mathbb{R}^4(t', x', y', z')$.

La più generale trasf. che soddisfa questo requisito è un'affinità. Infine la condizione che le origini coincidano obbliga a considerare solo isomorfismi tra i due spazi visti come spazi vettoriali; in altre parole, la cercata trasf. dovrà essere *lineare*. Inoltre y e z sono invarianti, e non le indicherò scrivendo le trasf.:

$$\begin{aligned} x' &= a\,x + b\,t \\ t' &= c\,x + d\,t. \end{aligned}$$

o anche, in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{2}$$

I coefficienti a, b, c, d sono funzioni di v, ed è immediato vedere che

$$a(0) = 1 \qquad b(0) = c(0) = 0 \qquad d(0) = 1.$$

Ne segue per continuità che sarà sempre $a > 0$, $d > 0$. È infatti impossibile che a o d si anullino per qualche v: avremmo risp. x' indipendente da x o t' indipendente da t per quel valore di v.

Usando le (1) si ha subito

$$b = -v\,a \qquad b = v'\,d \tag{3}$$

per cui la (2) diventa

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & -v\,a(v) \\ c(v) & -v\,a(v)/v'(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \tag{4}$$

dove ho evidenziato la dipendenza di a, c, v' da v.

Parità dei coefficienti *a*, *b*, *c*, *d*

I coefficienti a e d sono funzioni pari di v, gli altri due dispari. La cosa viene spesso data per ovvia, mentre richiede un esame attento per vedere quali ipotesi vengono usate per arrivare al risultato.

Sarà necessario introdurre, accanto ai due rif. già usati, K e K$'$, diversi altri rif.: $\bar{\mathrm{K}}$, $\bar{\mathrm{K}}'$, $\bar{\bar{\mathrm{K}}}'$. Per non appesantire il discorso converrà assumere che ciascun rif. sia rappresentato dal SC ad esso associato. Vediamo dunque le definizioni.

$\bar{\mathrm{K}}$: È il rif. K ruotato di 180° attorno all'asse z. L'origine $\bar{\mathrm{O}}$ coincide con O. Dato che la trasf. è puramente spaziale, la coordinata temporale non cambia. Quindi le coordinate in $\bar{\mathrm{K}}$ sono

$$\bar{x} = -x \qquad \bar{y} = -y \qquad \bar{z} = z \qquad \bar{t} = t. \tag{5}$$

$\bar{\mathrm{K}}'$: È il rif. K$'$ ruotato di 180° attorno all'asse z di K. L'origine $\bar{\mathrm{O}}'$ avrà rispetto a $\bar{\mathrm{K}}$ una legge oraria

$$\bar{x} = \bar{v}\,\bar{t} \tag{6}$$

e l'invarianza per rotazioni assicura che $\bar{v} = v$.

Scriviamo la legge di trasf. delle coordinate tra $\bar{\mathrm{K}}$ e $\bar{\mathrm{K}}'$:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{t}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a}(\bar{v}) & \bar{b}(\bar{v}) \\ \bar{c}(\bar{v}) & \bar{d}(\bar{v}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{t} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Dato che $\bar{\mathrm{K}}'$ si trova rispetto a $\bar{\mathrm{K}}$ nella stessa relazione di K$'$ rispetto a K, l'invarianza per rotazioni garantisce anche

$$\bar{a}(\bar{v}) = a(v) \qquad \bar{b}(\bar{v}) = b(v) \qquad \bar{c}(\bar{v}) = c(v) \qquad \bar{d}(\bar{v}) = d(v). \tag{8}$$

$\bar{\bar{\mathrm{K}}}'$: È il rif. $\bar{\mathrm{K}}'$ ruotato di 180° attorno al suo asse $\bar{z}'$. Le coordinate in $\bar{\bar{\mathrm{K}}}'$ sono

$$\bar{\bar{x}}' = -\bar{x}' \qquad \bar{\bar{y}}' = -\bar{y}' \qquad \bar{\bar{z}}' = \bar{z}' \qquad \bar{\bar{t}}' = \bar{t}' \tag{9}$$

L'origine $\bar{\bar{\mathrm{O}}}'$ coincide con $\bar{\mathrm{O}}'$.

Osserviamo ora che gli assi di $\bar{\bar{\mathrm{K}}}'$ sono orientati come quelli di K$'$ e di K e la sua origine $\bar{\bar{\mathrm{O}}}'$ si muove rispetto a K con la legge oraria

$$x = -v\,t$$

(questo segue dalle (5), dalla (6) e dal fatto che $\bar{\bar{\mathrm{O}}}' = \bar{\mathrm{O}}'$). Abbiamo poi

$$\bar{\bar{x}}' = -\bar{x}' = -\bar{a}(\bar{v})\,\bar{x} - \bar{b}(\bar{v})\,\bar{t}$$

(per la (7) e per la prima delle (9)) e poi

$$\bar{\bar{x}}' = -a(v)\,\bar{x} - b(v)\,\bar{t}$$

per la (8). Analogamente si procede per $\bar{\bar{t}}'$. Finalmente, usando le (5), la legge di trasf. delle coordinate da K a $\bar{\bar{\mathrm{K}}}'$ è

$$\begin{pmatrix} \bar{\bar{x}}' \\ \bar{\bar{t}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & -b(v) \\ -c(v) & d(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{10}$$

L'interesse del rif. $\bar{\bar{\mathrm{K}}}'$ è che esso differisce da K′

a) solo per avere rispetto a K la velocità $-v$ anziché v

b) per essere stato ottenuto da K′ con sole rotazioni, come $\bar{\mathrm{K}}$ a partire da K.

La *b*) ci è servita per arrivare alla (10) usando solo l'invarianza per rotazioni. La *a*) ci permette di scrivere direttamente la trasf. di coordinate da K a $\bar{\bar{\mathrm{K}}}'$, semplicemente rimpiazzando nella (2) v con $-v$:

$$\begin{pmatrix} \bar{\bar{x}}' \\ \bar{\bar{t}}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(-v) & b(-v) \\ c(-v) & d(-v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Basta ora confrontare (10) e (11) per ottenere la tesi:

$$a(-v) = a(v) \qquad b(-v) = -b(v) \qquad c(-v) = -c(v) \qquad d(-v) = d(v). \tag{12}$$

Come si vede, per arrivare alle (12) è bastata l'invarianza per rotazioni. [però...]

La trasformazione inversa

È rimasto aperto il problema di quale sia il valore v' di v che dà luogo alla trasf. inversa di quella da K a K′. Ho già osservato che *non è ovvio* che sia $v' = -v$; diamone ora la dimostrazione.

A questo scopo considero il rif. $\bar{\mathrm{K}}$ le cui coordinate sono definite dalla (5). La trasf. di coordinate (2) da K a K′, scritta tra $\bar{\mathrm{K}}$ e K′ diventa

$$\begin{aligned} x' &= -a\,\bar{x} + b\,\bar{t} \\ t' &= -c\,\bar{x} + d\,\bar{t}. \end{aligned} \tag{13}$$

Osserviamo ora che i due rif. *sono in situazione simmetrica*: ciascuno si muove rispetto all'altro nel verso negativo delle x. La simmetria ci assicura che la velocità relativa *sarà la stessa*, $-v$, da qualunque rif. la si misuri. Invece delle (1) avremo:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -v\bar{t} \text{ per O}' \text{ rispetto a } \bar{\mathrm{K}} \\ x' &= -vt' \text{ per } \bar{\mathrm{O}} \text{ rispetto a K}' \end{aligned} \tag{14}$$

e le (13) si dovranno scrivere più esattamente

$$
\begin{aligned}
x' &= -a(-v)\,\bar{x} + b(-v)\,\bar{t} \\
t' &= -c(-v)\,\bar{x} + d(-v)\,\bar{t}
\end{aligned}
$$

ovvero, tenendo presenti le (12):

$$
\begin{aligned}
x' &= -a(v)\,\bar{x} - b(v)\,\bar{t} \\
t' &= -c(v)\,\bar{x} + d(v)\,\bar{t}.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Tornando al rif. K al posto di $\bar{\mathrm{K}}$, queste si scrivono

$$
\begin{aligned}
x' &= a(v)\,x - b(v)\,t \\
t' &= c(v)\,x + d(v)\,t.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Dato che abbiamo ormai dimostrato $v' = -v$, le (3) vanno riscritte:

$$
b(v) = -v\,a(v) \qquad b(v) = -v\,d(v)
\tag{17}
$$

quindi $d(v) = a(v)$ e possiamo riscrivere ancora le (16):

$$
\begin{aligned}
x' &= a(v)\,(x - v\,t) \\
t' &= c(v)\,x + a(v)\,t.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Altre conseguenze

Conviene riscrivere anche le (15):

$$
\begin{aligned}
x' &= -a(v)\,(\bar{x} + v\,\bar{t}) \\
t' &= -c(v)\,\bar{x} + a(v)\,\bar{t}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

La simmetria tra $\bar{\mathrm{K}}$ e K' richiede che le (19) coincidano con le proprie inverse, che mandano (x', t') in $(\bar{x}, \bar{t})$. L'unica condizione nuova che se ne ricava è

$$
a^2 + v\,a\,c = 1
\tag{20}
$$

che determina c in funzione di a.

La struttura di gruppo

Conviene ora cambiare notazioni. Il rif. chiamato fin qui K' lo chiamerò $\mathrm{K}(v)$, per evidenziare la sua velocità rispetto a K. Potrà anche convenire indicare K come $\mathrm{K}(0)$.

Occorrerà assumere qualcosa sui possibili valori di v:

4: per v sono ammessi tutti i valori in un intervallo aperto centrato su 0.

Ovviamente non posso assumere tutti i valori in $\mathbb{R}$, se voglio prevedere la possibilità di una velocità limite.

Siano v_1, v_2 due velocità ammesse. Per il PR è possibile realizzare un rif. che si muove rispetto a $\mathrm{K}(v_1)$ con la velocità v_2. Tale rif. si muoverà rispetto a $\mathrm{K}(0)$ con una certa velocità w, che indicherò con $v_1 \oplus v_2$:

$$w = v_1 \oplus v_2.$$

Si vede che $\oplus$ definisce una *legge di composizione* nelle velocità, ed è facile capire che questa legge di composizione determina una *struttura di gruppo.* Indicherò questo gruppo con $\mathcal{L}$.

Scriverò la legge di composizione in forma di funzione, come segue:

$$v_1 \oplus v_2 = w(v_1, v_2).$$

È ovvio che

$$0 \oplus v = v \oplus 0 = v$$

$$w(v, 0) = w(0, v) = v$$

ossia lo 0 è l'elemento neutro in $\mathcal{L}$.

Nota: Se si assume che $\mathcal{L}$ sia un gruppo di Lie (cosa ammessa, esplicitamente o no, da tutti gli autori che si sono occupati della questione), essendo unidimensionale è commutativo:

$$v_1 \oplus v_2 = v_2 \oplus v_1.$$

La non compattezza (v. dopo) implica che $\mathcal{L}$ è isomorfo al gruppo additivo dei reali. Non è detto però che v sia il parametro del gruppo — quello che mappa $\mathcal{L}$ su $\mathbb{R}$— che indicherò con ϑ: scritta in funzione di ϑ la legge di composizione è la semplice addizione.

Osservazione: La commutatività della legge di composizione segue dall'ipotesi che $\mathcal{L}$ sia di Lie. È singolare che un'ipotesi puramente matematica abbia come conseguenza una proprietà *fisica*, che non sembra facile ricavare con argomenti solamente fisici.

Vediamo infatti che cosa implica la commutatività. Sia K_1 il rif. $\mathrm{K}(v_1)$ per data v_1, e sia K_2 il rif. che ha velocità v_2 rispetto a K_1. Naturalmente K_2 ha velocità $w(v_1, v_2)$ rispetto a K.

Se nel discorso scambiamo i ruoli di v_1 e v_2, arriviamo a K_3 che ha rispetto a K la velocità $w(v_2, v_1)$. Non è ovvio che K_2 e K_3 coincidano [cercare la dimostrazione?]

Fissata una v, definiamo ricorsivamente

$$v_0 = 0 \qquad v_n = v_{n-1} \oplus v \qquad (n \in \mathrm{N}^+)$$

(si vede subito che è anche $v_n = v \oplus v_{n-1}$). La successione $\{v_n\}$ è crescente [dimostrare?]: può avere limite finito o infinito. Dimostriamo che nel primo caso il limite $v_{\lim}$ non è una velocità ammissibile.

Supponiamo che lo sia: sarebbe allora ammissibile anche $v_{\lim} \oplus v > v_{\lim}$, contro l'ipotesi che $v_{\lim}$ sia limite (quindi anche sup) della successione.

Ne segue che $\mathcal{L}$ *non è compatto.* Lo stesso vale anche se il limite è infinito.

Matrici

La trasf. di coordinate (18) può essere scritta in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(v) & -v\,a(v) \\ c(v) & a(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Indicherò con $M(v)$ la matrice di trasformazione che figura nella (21).

Abbiamo allora

$$M(w) = M(v_1)M(v_2)$$

dove ho scritto, abbrevindo, w per $w(v_1, v_2)$. In dettaglio:

$$\begin{aligned} a(w) &= a(v_1)\,a(v_2) - v_1\,a(v_1)\,c(v_2) \\ w\,a(w) &= (v_1 + v_2)\,a(v_1)\,a(v_2) \\ c(w) &= a(v_1)\,c(v_2) + c(v_1)\,a(v_2) \\ a(w) &= a(v_1)\,a(v_2) - v_2\,c(v_1)\,a(v_2). \end{aligned} \tag{22}$$

Data la commutatività, è anche

$$M(w) = M(v_2)\,M(v_1)$$

ma non utilizzerò questa proprietà.

Da prima e ultima delle (22) si ricava

$$\frac{c(v_1)}{v_1\,a(v_1)} = \frac{c(v_2)}{v_2\,a(v_2)}$$

quindi

$$c(v) = p\,v\,a(v) \tag{23}$$

dove p è una costante, per ora arbitraria. La (23) insieme con la (20) fornisce

$$a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 + p\,v^2}}. \tag{24}$$

Sostituendo la (23) nella terza delle (22) si trova una relazione implicata dalla seconda e che quindi si può trascurare. Riassumendo, le (22) si riducono a

$$\begin{aligned} a(w) &= (1 - p\,v_1 v_2)\,a(v_1)\,a(v_2) \\ w\,a(w) &= (v_1 + v_2)\,a(v_1)\,a(v_2) \end{aligned} \tag{25}$$

da cui

$$w = \frac{v_1 + v_2}{1 - p\,v_1 v_2} \tag{26}$$

che determina la funzione $w(v_1, v_2)$ (la legge di composizione delle velocità) a meno della costante p. Si vede inoltre che la prima delle (25) segue da (24) e (26).

Possiamo quindi concludere che (24) e (26) contengono tutto ciò che si può dedurre dalla struttura di gruppo. Resta da studiare il parametro p, per capire quali valori possa assumere e quali leggi di trasf. ne conseguano.

Il teorema di Ignatowski

Dovremo distinguere 3 casi: $p = 0$, $p > 0$, $p < 0$.

A: $p = 0$: In questo caso abbiamo

$$a(v) = 1 \qquad c = 0$$

e le (18) diventano

$$\begin{aligned} x' &= x - v\,t \\ t' &= t \end{aligned}$$

che sono le *trasformazioni di Galileo.* La legge di composizione è

$$v_1 \oplus v_2 = v_1 + v_2.$$

B: $p > 0$: Poniamo $p = k^2$: allora

$$a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 v^2}} \qquad c(v) = \frac{k^2 v}{\sqrt{1 + k^2 v^2}} \tag{27}$$

$$w = \frac{v_1 + v_2}{1 + k^2 v_1 v_2}. \tag{28}$$

Se definiamo

$$\vartheta = \operatorname{arctg} k\,v$$

le (27), (28) si scrivono

$$\begin{gathered} a(\vartheta) = \cos\vartheta \qquad c(\vartheta) = k\,\sin\vartheta \\ \operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}(\vartheta_1 + \vartheta_2) \end{gathered}$$

e le (18):

$$k\,x' = k\,x\,\cos\vartheta - t\,\sin\vartheta$$
$$t' = k\,x\,\sin\vartheta + t\,\cos\vartheta$$

che è una rotazione nel piano (kx, t).

Quindi il gruppo $\mathcal{L}$ è compatto, il che contraddice quanto abbiamo dimostrato; ne segue che questa scelta è impossibile.

C: $p < 0$: Poniamo $p = -1/v_{\mathrm{lim}}^2$: allora

$$a(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/v_{\mathrm{lim}}^2}} \qquad c(v) = -\frac{v/v_{\mathrm{lim}}^2}{\sqrt{1 - v^2/v_{\mathrm{lim}}^2}} \tag{29}$$

$$w = \frac{v_1 + v_2}{1 - v_1 v_2/v_{\mathrm{lim}}^2} \tag{30}$$

e le (18) diventano

$$x' = \gamma\,(x - v\,t)$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v\,x}{v_{\mathrm{lim}}^2}\right)$$

avendo posto

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/v_{\mathrm{lim}}^2}}.$$

Queste sono le *trasformazioni di Lorentz* con v_{lim} al posto di c.

Il teorema di Ignatowski è dimostrato.

[spiegare meglio alcuni passaggi]

[cercare le dim. accennate]

[approfondire la distinzione tre rif. e SC?]

[confrontare con Ignatowski per le ipotesi]

[1] V. Ignatowski, *Phys. Z.* **11** (1910), 972.

[2] W. Rindler: *Essential Relativity*, rev. 2nd ed. (Springer 1979), 51.

[3] J.H. Field, *Helv. Phys. Acta* **70** (1997), 542

[4] P.B. Pal, arXiv:physics/0302045v1.pdf