E. Fabri *aprile 2023*

Calcolo del tensore di Riemann nella metrica di Langevin

Un lavoro inutile

Ovviamente il tensore di Riemann di cui al titolo è nullo:

1) perché se si parte da una metrica cui $\mathbf{R} = 0$, lo stesso sarà vero in qualunque sistema di coordinate
2) perché così dice pure `maxima`.

Ma c'è chi non vuole ammetterlo, quindi qui di seguito presento il calcolo diretto che dovrebbe tagliare la testa al toro.

Per i coefficienti di connessione ho scelto una via abbreviata, ricavandoli delle equazioni delle geodetiche, ottenute col metodo lagrangiano. Ci sono due semplificazioni:

– la prima è che la coord. z può essere ignorata (e questo era prevedibile)
– la seconda è che contro il numero massimo di 40 in 4 dimensioni e 18 in 3D, solo 5 coeff. di connessione sono diversi da zero; il che dipende dal fatto che la metrica è quasi diagonale, e tutte le componenti del tensore metrico dipendono solo da r.

Il calcolo delle componenti di $\mathbf{R}$ è fatto con la formula standard, che risulta trattabile perché molti termini si annullano; quelli non nulli si cancellano e il risultato è quello previsto-

Lagrangiana e costanti del moto

È noto che le geodetiche si possono ottenere da un principio variazionale, la cui lagrangiana si ricava dalla metrica: le coordinate x^α sono le coord. lagrangiane della mecc. analitica, il tempo proprio ha la funzione di tempo. Si ha

$$L = \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta .$$

La metrica è

$$d\tau^2 = (1 - \omega^2 r^2)\, dt^2 - dr^2 - 2\,\omega\, r^2 dt\, d\varphi - r^2 d\varphi^2 - dz^2$$

e quindi la lagrangiana è

$$2\,L = (1 - \omega^2 r^2)\, \dot{t}^2 - \dot{r}^2 - 2\,\omega\, r^2 \dot{t}\, \dot{\varphi} - r^2 \dot{\varphi}^2 - \dot{z}^2 .$$

Nota: Qui e in seguito uso come parametro affine il tempo proprio, il che è accettabile solo per le geodetiche di tipo tempo. Tuttavia non cambia niente nelle equazioni se a τ si sostituisce un generico parametro affine λ.

Costanti del moto: Si possono sfruttare costanti del moto, se esistono, per abbreviare il lavoro. In particolare sono integrali primi i momenti coniugati a coord. *ignorabili.*

La nostra L dipende solo da r, quindi p_t, p_φ, p_z sono costanti del moto:

$$\begin{aligned}
\dot p_t &= \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot t} = (1-\omega^2 r^2)\,\ddot t - 2\,\omega^2 r\,\dot t\,\dot r - \omega\, r^2 \ddot\varphi - 2\,\omega\, r\,\dot r\,\dot\varphi = 0\\
\dot p_\varphi &= \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = -\omega\, r^2 \ddot t - 2\,\omega\, r\,\dot t\,\dot r - r^2\ddot\varphi - 2\,r\,\dot r\,\dot\varphi = 0\\
\dot p_z &= \frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot z} = -\ddot z = 0
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\ddot t &= 0\\
\ddot\varphi &= -\frac{2\,\omega}{r}\,\dot t\,\dot r - \frac{2}{r}\,\dot r\,\dot\varphi\\
\ddot z &= 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Inoltre $2\,L$ è costante del moto

$$\frac{d}{d\tau}\,\left[(1-\omega^2 r^2)\,\dot t^2 - \dot r^2 - 2\,\omega\, r^2 \dot t\,\dot\varphi - r^2\dot\varphi^2 - \dot z^2\right] = 0.$$

Sviluppando, eliminando $\ddot t$, $\ddot\varphi$, $\ddot z$ dalle (1) e risolvendo rispetto a $\ddot r$ troviamo

$$\ddot r = \omega^2 r\,\dot t^2 + 2\,\omega\, r\,\dot t\,\dot\varphi + r\,\dot\varphi^2 = r\,\left(\dot\varphi + \omega\,\dot t\right)^2. \tag{2}$$

La forma generale delle eq. delle geodetiche è

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\,\frac{dx^\beta}{d\tau}\,\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

e confrontando questa con le (1), (2) si ricavano i coeff. di connessione:

$$\Gamma^t{}_{\beta\gamma} = \Gamma^z{}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha{}_{z\beta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta z} = 0 \tag{3}$$

$$\Gamma^r{}_{tt} = -\omega^2 r \qquad \Gamma^r{}_{t\varphi} = \Gamma^r{}_{\varphi t} = -\omega\, r \qquad \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -r \tag{4}$$

$$\Gamma^\varphi{}_{tr} = \Gamma^\varphi{}_{rt} = \frac{\omega}{r} \qquad \Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi r} = \frac{1}{r}. \tag{5}$$

È utile osservare che $\dot z$ non figura in nessuna delle eq. delle geodetiche, quindi tutti i coeff. di connessione, con z in qualsiasi posizione, sono nulli. In altre parole possiamo trascurare del tutto l'indice z nel calcolo.

Il tensore di Riemann

La forma generale è

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\varepsilon}\,\Gamma^\varepsilon{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\delta\varepsilon}\,\Gamma^\varepsilon{}_{\beta\gamma}.$$

La prima delle (1) mostra che

$$R^t{}_{\beta\gamma\delta} = 0$$

per tutti i β, γ, δ. Restano quindi da calcolare $R^r{}_{\beta\gamma\delta}$ e $R^\varphi{}_{\beta\gamma\delta}$.

Per $R^r{}_{\beta\gamma\delta}$ osservo che la somma su ε conterrà solo il termine in φ, perché $\Gamma^r{}_{\gamma r} = 0$ e anche $\Gamma^t{}_{\beta\gamma} = 0$:

$$R^r{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^r{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^r{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^r{}_{\gamma\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{\beta\delta} - \Gamma^r{}_{\delta\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{\beta\gamma}.$$

Proviamo a scrivere separatamente i tre casi ammessi per γ, δ:

$$R^r{}_{\beta tr} = -\Gamma^r{}_{\beta t,r} + \Gamma^r{}_{t\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{\beta r} \tag{6}$$

(il primo termine a destra si annulla a causa della derivata rispetto a t, l'ultimo perché $\Gamma^r{}_{r\varphi} = 0$);

$$R^r{}_{\beta t\varphi} = \Gamma^r{}_{t\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{\beta\varphi} - \Gamma^r{}_{\varphi\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{\beta t} \tag{7}$$

(i primi due termini a destra si annullano a causa delle derivate);

$$R^r{}_{\beta r\varphi} = \Gamma^r{}_{\beta\varphi,r} - \Gamma^r{}_{\varphi\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{\beta r} \tag{8}$$

(il secondo termine a destra si annulla a causa della derivata, il terzo perché $\Gamma^r{}_{r\varphi} = 0$).

Nella (6) β ha tre possibilità:

$$\begin{aligned}
R^r{}_{ttr} &= -\Gamma^r{}_{tt,r} + \Gamma^r{}_{t\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{tr} = \omega^2 - \omega\,r\,\frac{\omega}{r} = 0\\
R^r{}_{rtr} &= -\Gamma^r{}_{rt,r} + \Gamma^r{}_{t\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{rr} = 0\\
R^r{}_{\varphi tr} &= -\Gamma^r{}_{\varphi t,r} + \Gamma^r{}_{t\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{\varphi r} = \omega - \omega\,r\,\frac{1}{r} = 0.
\end{aligned}$$

È così dimostrato

$$R^r{}_{\beta\gamma\delta} = 0.$$

Passiamo a $R^\varphi{}_{\beta\gamma\delta}$:

$$R^\varphi{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\varphi{}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^\varphi{}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^\varphi{}_{\gamma\varepsilon}\,\Gamma^\varepsilon{}_{\beta\delta} - \Gamma^\varphi{}_{\delta\varepsilon}\,\Gamma^\varepsilon{}_{\beta\gamma}.$$

Qui conviene studiare subito i tre casi generali, tenendo presente che nella somma su ε non esiste il caso $\varepsilon = t$. Le tre possibilità sono

$$R^\varphi{}_{\beta tr} = -\Gamma^\varphi{}_{\beta t,r} + \Gamma^\varphi{}_{r\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{\beta t} - \Gamma^\varphi{}_{tr}\,\Gamma^r{}_{\beta r} \tag{9}$$

(il primo termine a destra si annulla a causa della derivata rispetto a t, il terzo perché $\Gamma^\varphi{}_{rr} = 0$, il sesto perché $\Gamma^\varphi{}_{t\varphi} = 0$);

$$R^\varphi{}_{\beta t\varphi} = -\Gamma^\varphi{}_{\beta t,\varphi} + \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\,\Gamma^r{}_{\beta t} - \Gamma^\varphi{}_{tr}\,\Gamma^r{}_{\beta\varphi} \tag{10}$$

(il primo termine a destra si annulla a causa della derivata rispetto a t, il quarto perché $\Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi} = 0$, il sesto perché $\Gamma^\varphi{}_{t\varphi} = 0$);

$$R^\varphi{}_{\beta r\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\beta\varphi,r} + \Gamma^\varphi{}_{r\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{\beta\varphi} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\,\Gamma^r{}_{\beta r} \tag{11}$$

(il secondo termine a destra si annulla a causa della derivata rispetto a φ, il terzo perché $\Gamma^\varphi{}_{rr} = 0$, il sesto perché $\Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi} = 0$).

In ciascuna delle (9), (10), (11) β ha tre possibilità:

$$\begin{aligned}
R^\varphi{}_{ttr} &= -\Gamma^\varphi{}_{tt,r} + \Gamma^\varphi{}_{r\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{tt} - \Gamma^\varphi{}_{tr}\,\Gamma^r{}_{tr} = 0\\
R^\varphi{}_{rtr} &= -\Gamma^\varphi{}_{rt,r} + \Gamma^\varphi{}_{r\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{rt} = -\frac{\omega}{r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\omega}{r} = 0\\
R^\varphi{}_{\varphi tr} &= -\Gamma^\varphi{}_{\varphi t,r} + \Gamma^\varphi{}_{r\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{\varphi t} - \Gamma^\varphi{}_{tr}\,\Gamma^r{}_{\varphi r} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^\varphi{}_{tt\varphi} &= \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\,\Gamma^r{}_{tt} - \Gamma^\varphi{}_{tr}\,\Gamma^r{}_{t\varphi} = -\frac{1}{r}\,\omega^2 r + \frac{\omega}{r}\,\omega\, r = 0\\
R^\varphi{}_{rt\varphi} &= \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\,\Gamma^r{}_{rt} - \Gamma^\varphi{}_{tr}\,\Gamma^r{}_{r\varphi} = 0\\
R^\varphi{}_{\varphi t\varphi} &= \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\,\Gamma^r{}_{\varphi t} - \Gamma^\varphi{}_{tr}\,\Gamma^r{}_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{r}\,\omega\, r + \frac{\omega}{r}\, r = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^\varphi{}_{tr\varphi} &= \Gamma^\varphi{}_{t\varphi,r} + \Gamma^\varphi{}_{r\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{t\varphi} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\,\Gamma^r{}_{tr} = 0\\
R^\varphi{}_{rr\varphi} &= \Gamma^\varphi{}_{r\varphi,r} + \Gamma^\varphi{}_{r\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{1}{r} = 0\\
R^\varphi{}_{\varphi r\varphi} &= \Gamma^\varphi{}_{r\varphi}\,\Gamma^\varphi{}_{\varphi\varphi} - \Gamma^\varphi{}_{\varphi r}\,\Gamma^r{}_{\varphi r} = 0
\end{aligned}$$

È così dimostrato anche

$$R^\varphi{}_{\beta\gamma\delta} = 0$$

e quindi $\mathbf{R} = 0$.