E. Fabri *ottobre 2016*

Sincronizzazione e causalità *

Introduzione

Sopo di questo scritto è di esporre le idee che mi sono venuto formando sulle due questioni del titolo: in particolare sul carattere convenzionale della sincronizzazione tra orologi distanti, e sul modo di caratterizzare la causalità tra eventi separati spazialmente.

La visione "standard" della RR la ritengo troppo nota per doverla anche solo riassumere. La questione della convenzionalità è stata discussa moltissime volte e viene ancora discussa. Non presenterò riferimenti precisi: un po' perché sarebbero troppi, e molto perché li conosco pochissimo e tutto sommato mi sembrano irrilevanti per il mio scopo, al di là della formulazione di base del problema.

Userò le seguenti notazioni:

– le maiuscole da A a H indicano eventi

– K (ev. con indici vari) indica riferimenti

– le maiuscole da M a Z indicano punti dello spazio (e anche orologi).

Convenzionalità della sincronizzazione a distanza

La critica che si fa alla sincronizzazione standard (SS, detta anche "alla Einstein") è che essa assume l'invarianza della velocità "one way" della luce, ma questa è verificabile sperimentalmente solo se già si possiedono orologi sincronizzati posti in punti diversi di un dato rif.

Quindi si deve assumere che la sincron. fra orologi situati in punti diversi non ha significato fisico, ma si può solo stabilire come *convenzione*. Ne segue che è altrettanto privo di significato fisico tutto ciò che si può derivare da una qualsiasi sincron., quella standard inclusa.

Lo sarebbe quindi il concetto di *cono luce* con la conseguente classificazione degli eventi, e la fondazione della causalità sulla successione temporale di eventi in luoghi diversi (v. più avanti).

Discussione della sincronizzazione a distanza

Occorre prima di tutto aver fissato un dato *riferimento* (rif.) K, inteso come insieme *rigido* di corpi (regoli, strumenti di misura). La rigidità dell'insieme può venir stabilita in due modi, il primo dei quali però è praticabile solo entro un ambito di distanze limitato:

* Versione provvisoria, in elaborazione. Ultima modifica: 25–10–16.

– si misurano le distanze tra punti distinti del rif. a tempi diversi, usando dei regoli, e ci si assicura che tali distanze restino costanti
– si fa uso di segnali e.m., secondo una procedura (*metodo radar*) che occorre dettagliare.

Il metodo radar

Siano P, Q due punti di K dove si trovano due orologi. Inviamo da P verso Q una successione di segnali, emessi ai tempi $t_{\mathrm{e}1}$, $t_{\mathrm{e}2}$, ... Appena ricevuti in Q, i segnali vengono rimandati a P, dove vengono ricevuti ai tempi $t_{\mathrm{r}1}$, $t_{\mathrm{r}2}$, ... Dirò che P e Q sono in *quiete relativa* se

$$t_{\mathrm{r}1} - t_{\mathrm{e}1} = t_{\mathrm{r}2} - t_{\mathrm{e}2} = \cdots \tag{1}$$

Nota: Occorre notare tre cose:

a) il metodo radar usa solo intervalli di tempo misurati su *uno stesso* orologio
b) per ciascun orologio si richiede solo che mantenga *marcia costante*: cosa tutt'altro che banale da verificare, ma che esula dal mio scopo attuale
c) per la velocità della luce, occorre assumere solo che questa (misurata in andata e ritorno) resti *costante nel tempo*.

Il rif. K è *rigido* se tutti i suoi punti risultano a distanza costante (se misurata secondo il primo metodo) o se sono in quiete relativa (secondo il metodo radar).

Tra i rif. rigidi si distinguono quelli *inerziali*, definiti come di consueto.

Regolazione degli orologi

Un secondo passo consiste nel verificare che gli orologi concordino quanto alla marcia: che nessuno guadagni o perda sugli altri. Siano $t_{\mathrm{m}1}$, $t_{\mathrm{m}2}$, ... i tempi di ricezione registrati da Q. Si deve controllare che siano soddisfatte le relazioni

$$t_{\mathrm{m}1} - t_{\mathrm{e}1} = t_{\mathrm{m}2} - t_{\mathrm{e}2} = \cdots \tag{2}$$

(si noti che le

$$t_{\mathrm{r}1} - t_{\mathrm{m}1} = t_{\mathrm{r}2} - t_{\mathrm{m}2} = \cdots \tag{3}$$

seguono da (1) e (2)).

Se si trovasse uno scostamento dalle (2), lo si potrebbe attribuire a due diverse cause:

1) i due orologi non hanno la stessa marcia
2) la velocità "one-way" cambia nel corso dell'esperimento.

Sarebbe però assai difficile (anzi impossibile) giustificare i risultati delle misure, specie quelli che implicano più orologi, con la sola ipotesi 2). Inoltre, se la marcia ("rate") degli orologi può essere regolata, si può tentare di annullare lo scostamento. Assumerò come *fatto sperimentale* che tale anullamento sia effettivamente possibile, escludendo quindi l'ipotesi 2).

Non sincronizzazione di orologi distinti

In generale non saranno soddisfatte le seguenti uguaglianze:

$$t_{\mathrm{r1}} - t_{\mathrm{m1}} = t_{\mathrm{m1}} - t_{\mathrm{e1}} \qquad t_{\mathrm{r2}} - t_{\mathrm{m2}} = t_{\mathrm{m2}} - t_{\mathrm{e2}} \qquad \cdots \tag{4}$$

anche se da (2) e (3) segue necessariamente che le differenze

$$\begin{gathered} (t_{\mathrm{r1}} - t_{\mathrm{m1}}) - (t_{\mathrm{m1}} - t_{\mathrm{e1}}) \\ (t_{\mathrm{r2}} - t_{\mathrm{m2}}) - (t_{\mathrm{m2}} - t_{\mathrm{e2}}) \\ \cdots \end{gathered} \tag{5}$$

sono tutte uguali per una data coppia di orologi. In questo consiste la residua non-sincron. tra orologi in luoghi diversi, che per un convenzionalista che definirei "radicale" è ineliminabile, nel senso che tentare di eliminarla sarebbe privo di contenuto fisico.

Contenuto fisico della sincronizzazione alla Einstein

Occorre però rimarcare che *la possibilità* di una SS *ha contenuto fisico*: vediamo perché.

La SS consiste nel modificare lo "zero" dei vari orologi in modo da annullare le differenze (5). Una volta che ciò sia stato fatto, poniamo tra P e Q, avremo che i tempi di andata e ritorno dei segnali sono uguali, ossia che sono uguali le rispettive velocità.

Nota: Si vede che per costruzione questa sincron. è una relazione *riflessiva* e *simmetrica*.

Eseguiamo la stessa operazione fra P e R. Ora tanto Q che R sono sincronizzati con P, e non c'è più nessun grado di libertà residuo: abbiamo fissato tanto la marcia degli orologi, quanto i loro zeri. Ha dunque pieno senso fisico chiedersi: ciò fatto, come troveremo i due orologi Q, R? Saranno o no sincronizzati?

Nota: Se la risposta è affermativa per ogni terna di orologi, la relazione è anche *transitiva*, quindi è una *relazione di equivalenza*. È questo che permette di asserire che la procedura di sincron. tra coppie di orologi (ma basta sincronizzare ogni orologio con un "master") definisce una *scala di tempo*, ossia una *coordinata temporale*, su tutto il rif.

La risposta alla domanda fatta può darla solo l'esperienza, e il semplice fatto che la SS sia universalmente assunta nella RR e sottintesa in tutti i calcoli ed esperimenti, fornisce già la risposta:

l'esperienza mostra che la SS *è transitiva,*
quindi è una buona scala di tempo per un intero rif. inerziale.

Ciò non significa che sia l'unica sincron. logicamente ed empiricamente possibile: è questo il solo contenuto inconfutabile della tesi convenzionalista. Tuttavia il vantaggio che tale scelta presenta da tutti punti di vista, teorici e pratici, rende del tutto giustificata la sua adozione generale. Né si vedono motivi per discostarsene, salvo discutere più a fondo il problema della causalità; cosa che faremo più avanti.

Vale però la pena di mostrare quali siano le altre sincron. concepibili sotto ipotesi semplici, e di chiarire quali effetti ha, sulla forma delle leggi fisiche, l'adozione di una sincron. diversa da quella standard.

Sincronizzazione e coordinate

Esiste una connessione tra la scelta della sincron. e l'adozione di una o un'altra coordinata temporale; ma questo va approfondito. In partenza quando si parla di sincron. (come abbiamo fatto più sopra) s'intende una cosa diversa: si pensa a una procedura per definire *sincronizzati* due *orologi* situati in *punti diversi* di uno stesso rif.

Supponiamo di aver eseguito una qualche sincron. (per es. quella standard), e sia t la scala di tempo così definita. Una sincron. diversa può essere materializzata assumendo che in ogni punto P dello spazio, accanto all'orologio che segna il tempo t, ne esista uno che *per uno stesso evento che abbia luogo in* P segna un diverso tempo u. La differenza tra t e u può solo dipendere da P:

$$t = u + f(\mathrm{P}). \tag{6}$$

La (6) può essere letta come una particolare trasf. di coordinate, e questo stabilisce la relazione tra SC e sincron., cui accennavo sopra.

Osservo che a prescindere dalla relatività, una volta scelto un rif. inerziale, e in esso un SC spaziali (x, y, z) (che non verrà mai toccato nel seguito) la scelta della coordinata temporale resta libera. Nella fisica newtoniana nessuno si pone il problema, visto che il tempo è inteso come *assoluto*, e quindi è lecito al più cambiare la coordinata temporale mediante una trasf. affine, indipendente dal punto.

Del resto l'esperienza giustifica questo modo di vedere, finché non si dispone di orologi (e altri strumenti) sufficientemente raffinati da evidenziare gli effetti relativistici. Invece in RR si può concepire qualcosa di più complesso (ed è questo il succo della discussione convenzionalista).

Tuttavia la f non può essere arbitraria, se si pone qualche requisito addizionale alla sincron. Il più semplice e ovvio è che una sincron. debba essere *invariante per traslazioni spaziali.* Ciò significa che per ogni coppia (P, Q) e per ogni vettore $\mathbf{u}$ deve valere

$$f(\mathrm{P}) - f(\mathrm{Q}) = f(\mathrm{P} + \mathbf{u}) - f(\mathrm{Q} + \mathbf{u}). \tag{7}$$

Dalla (7) segue, fissata a piacere un'origine O, che f dipende solo da $\mathbf{r} = \mathrm{P} - \mathrm{O}$.

Altre condizioni sono poste su f:
– dalla simmetria

$$f(-\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$$

– dalla transitività

$$f(a\,\mathbf{r} + b\,\mathbf{s}) = a\,f(\mathbf{r}) + b\,f(\mathbf{s})$$

(questa non è proprio banale, ma tralascio la dimostrazione).

Dunque f è funzione *lineare* di $\mathbf{r}$, ed esiste un $\mathbf{k}$ tale che:

$$f(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}.$$

Riassumendo: per ogni sincron. u diversa da quella standard, che sia invariante per traslazioni, esiste un vettore $\mathbf{k}$ tale che fra u e la SS t vale la relazione

$$t = u + \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}. \tag{8}$$

Nota: Questa è la classe di sincron. assunte in [1], [2] senza una giustificazione esplicita. Implicitamente sembra che la (8) venga fatta discendere dalle proprietà che ne derivano per la velocità "one-way":

– che essa dipenda solo dalla direzione, non dal punto di partenza
– che la dipendenza abbia la forma (1) di [1].

Invarianza della velocità della luce su un cammino chiuso

A questo punto la questione è quasi banale, ma esponiamola sommariamente.

Siano P, Q due punti dello spazio, γ un arco di curva regolare, di lunghezza L, che li unisce. Un lampo di luce parte da P e raggiunge Q seguendo γ. Secondo la SS l'intervallo di tempo tra partenza e arrivo del lampo è L/c. Precisiamo: ci sono due eventi, A e B, risp. partenza e arrivo del lampo. I tempi corrispondenti, misurati da due orologi posti in P e Q e sincronizzati secondo la SS, siano t_A, t_B. L'intervallo detto è $t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A}$.

Quanto vale questo intervallo se misurato secondo una diversa sincron.? La risposta è ovvia, data la (8): sarà

$$u_\mathrm{B} - u_\mathrm{A} = t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A} - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_\mathrm{Q} - \mathbf{r}_\mathrm{P}). \tag{9}$$

Se Q coincide con P, ossia se γ è una curva chiusa, il secondo termine a destra nella (9) si annulla, per cui

$$u_\mathrm{B} - u_\mathrm{A} = t_\mathrm{B} - t_\mathrm{A} = L/c. \tag{10}$$

La (10) esprime appunto l'invarianza della velocità della luce su un cammino chiuso, ossia la sua *indipendenza dalla scelta della sincron.*

RR e sincronizzazioni non standard

Dato che i convenzionalisti non vogliono mettere in discussione la RR, ma solo rimarcare che cosa è "fisicamente significativo" e che cosa soltanto frutto di convenzione, ha senso conservare il tempo proprio (tempo segnato da un orologio che accompagna il moto di un corpo) con la consueta definizione alla Minkowski [(1)]

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{11}$$

e $d\tau^2$ potrà (dovrà) essere anche espresso nelle nuove coordinate. Avremo [(2)]

$$\begin{aligned} d\tau^2 = du^2 + 2\,k^x\,du\,dx + 2\,k^y\,du\,dy + 2\,k^z\,du\,dz \,-& \\ \bigl(1-(k^x)^2\bigr)\,dx^2 - \bigl(1-(k^y)^2\bigr)\,dy^2 - \bigl(1-(k^z)^2\bigr)\,dz^2 \,-& \\ 2\,k^x\,k^y\,dx\,dy - 2\,k^x\,k^z\,dx\,dz - 2\,k^y\,k^z\,dy\,dz.& \end{aligned} \tag{12}$$

Anche se non è abituale, non c'è niente di strano a usare in RR coordinate diverse da quelle minkowskiane. Nel nostro caso la variazione è modesta (cambia solo la coordinata temporale) ma ciò basta per cambiare (complicare) l'espressione del tensore metrico. Il che ha una serie di conseguenze: la tecnica dei quadrivettori, di abbassare e alzare gli indici in modo semplice, di scrivere sempre in modo semplice eq. diff. come quelle di Maxwell, *va abbandonata.* Purtroppo quasi tutti quelli che hanno scritto sull'argomento non hanno la preparazione matematica necessaria, e questo ha causato una quantità di scivolamenti parafilosofici, che non hanno ragione di essere.

Il più grave — e che mi pare stia alla radice di tutti gli altri — è quello che si trova espresso in modo esplicito per es. in [2], dove si pretende addirittura di dare un diverso significato fisico alle componenti covarianti e controvarianti di un 4-vettore, inventandosi pure due "osservatori" diversi. Mentre in realtà queste sono solo *componenti* rispetto a una certa base nello spazio dei vettori tangenti (di solito ciò equivale a dire "rispetto a un certo SC"). Le grandezze aventi significato fisico sono necessariamente *invarianti*, quindi indipendenti da basi e coordinate.

[citare Minguzzi]

Passerò ora a mostrare come si deve procedere.

Relatività ristretta in coordinate generali

È ben noto che l'uso delle cordinate generali (non-minkowskiane) s'impone in RG: Einstein dovette studiarsi la matematica necessaria, che al tempo era

(1) Si sa che esistono due diverse convenzioni per il segno nella (11). Io uso sistematicamente quella qui scritta.

(2) Occorre fare attenzione: nella (8) compare il prodotto scalare *spaziale* $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$, che espresso in componenti diventa $k^x x + k^y y + k^z z$.

argomento di ricerca avanzata, sebbene avesse avuto inizio con Riemann 60 anni prima. Di conseguenza si è creata una leggenda: che usare coordinate generali significhi *fare* RG. Il che è totalmente falso: lo prova la discussione sui riferimenti accelerati, ma forse lo prova in modo ancora più evidente il problema di cui ci stiamo occupando.

Ho accennato sopra ad alcune conseguenze dell'uso di coordinate non minkowskiane: vediamo ora in maggior dettaglio.

Componenti covarianti e controvarianti

Cominciamo col caso semplice di un 4-vettore, per es. l'impulso-energia. È tradizionale in RR scriverlo secondo convenienza in forma covariante (indici in basso: p_α) o controvariante (indici in alto: p^α). Per es. è naturale usare l'espressione controvariante quando si scrive la relazione fra impulso-energia e 4-velocità: essendo espressa quest'ultima come derivata delle coordinate [(3)] rispetto al tempo proprio, la relazione naturale è

$$p^\alpha = m\,\frac{dx^\alpha}{d\tau}. \tag{13}$$

Quando serve l'invariante, ossia la forma minkowskiana della relazione

$$E^2 = p^2 + m^2,$$

è comodo scriverla usando il prodotto scalare

$$p^\alpha p_\alpha = m^2 \tag{14}$$

dove figurano entrambe le forme, covariante e controvariante.

Si sa che in coordinate minkowskiane la relazione tra le due forme è semplice:

$$p_0 = p^0 \qquad p_i = -p^i \tag{15}$$

(qui e in seguito gli indici greci vanno da 0 a 3, quelli latini da 1 a 3). Le (15) possono essere scritte (lo si fa spesso) in modo diverso:

$$p_\alpha = \eta_{\alpha\beta}\, p^\beta \tag{16}$$

dove $\eta_{\alpha\beta}$ è la notazione tradizionale per il tensore metrico minkowskiano

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

[(3)] Ci si può chiedere perché mettere gli indici in alto alle coordinate. La ragione c'è, ma non vorrei divagare troppo, e questo non è un corso di calcolo tensoriale...

e si è fatto uso della convenzione di Einstein di sottintendere la somma su un indice ripetuto una volta in alto e una volta in basso.

Passaggio a coordinate generali

Tutte cose ben note a chi ha studiato la RR in forma tensoriale. Ma che cosa cambia se usiamo coordinate diverse, e quindi sono diverse le componenti del tensore metrico? Per cominciare, sarà bene cambiare un po' la notazione. Anche se la nostra trasf. (8) è molto particolare, conviene usare simboli diversi per le nuove coordinate, che le distinguano da quelle vecchie (minkowskiane) pure quando in realtà coincidono, com'è il caso di x, y, z.

In primo luogo userò ora x^0, x^1, x^2, x^3 al posto di t, x, y, z. Parallelamente le nuove coord. saranno indicate con $\tilde{x}^0$, $\tilde{x}^1$, $\tilde{x}^2$, $\tilde{x}^3$. Scrivo esplicitamente la (8) nella nuova notazione: [4]

$$\begin{aligned} x^0 &= \tilde{x}^0 - k_i\,\tilde{x}^i \\ x^1 &= \tilde{x}^1 \\ x^2 &= \tilde{x}^2 \\ x^3 &= \tilde{x}^3. \end{aligned} \tag{18}$$

Per maggior chiarezza userò lettere greche da α a κ per le vecchie coordinate; da λ a σ per le nuove. In forma matriciale le (18) si scrivono

$$x^\alpha = A^\alpha{}_\lambda\,\tilde{x}^\lambda \tag{19}$$

con

$$A^\alpha{}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

La trasf. inversa, dalle x^α alle $\tilde{x}^\lambda$, si scrive con la matrice B, inversa della A:

$$\tilde{x}^\lambda = B^\lambda{}_\alpha\,x^\alpha \tag{21}$$

con

$$B^\lambda{}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

L'espressione (12) della metrica si scriverà sinteticamente

$$d\tau^2 = \tilde{g}_{\lambda\mu}\,d\tilde{x}^\lambda\,d\tilde{x}^\mu \tag{23}$$

---

[4] Nella (18) c'è un apparente cambiamento di segno rispetto alla (8) (v. anche la Nota 2). La ragione è che nella (18) compaiono le componenti *covarianti* k_x, k_y, k_z, che hanno segno opposto a quelle controvarianti.

dove le componenti $\tilde{g}_{\lambda\mu}$ sono date da

$$\tilde{g}_{\lambda\mu} = A_\lambda{}^\alpha\, \eta_{\alpha\beta}\, A^\beta{}_\mu = \begin{pmatrix} 1 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ -k_1 & -1 + k_1^2 & k_1\, k_2 & k_1\, k_3 \\ -k_2 & k_1\, k_2 & -1 + k_2^2 & k_2\, k_3 \\ -k_3 & k_1\, k_3 & k_2\, k_3 & -1 + k_3^2 \end{pmatrix} \tag{24}$$

(qui $A_\lambda{}^\alpha$ indica la matrice trasposta di $A^\alpha{}_\lambda$). Per uso futuro scrivo anche l'espressione del tensore metrico in componenti controvarianti, che si ottiene prendendo l'inversa della matrice (24):

$$\tilde{g}^{\lambda\mu} = \begin{pmatrix} 1 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 & -k_1 & -k_2 & -k_3 \\ -k_1 & -1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & -1 & 0 \\ -k_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

La (13) e la (14) non cambiano, anche se le scriviamo nelle nuove cordinate (quindi con $\tilde{x}^\lambda$, $\tilde{p}^\lambda$, $\tilde{p}_\lambda$) a patto di modificare la (16) in

$$\tilde{p}_\lambda = \tilde{g}_{\lambda\mu}\, \tilde{p}^\mu \tag{26}$$

dove per $\tilde{g}_{\lambda\mu}$ si userà la giusta espressione del tensore metrico (nel nostro caso la (24)). Le (15) invece non valgono più: andranno sostituite da

$$\begin{gathered} \tilde{p}_0 = \tilde{p}^0 - k_i\, \tilde{p}^i \\ \tilde{p}_1 = -k_1\, \tilde{p}^0 - \tilde{p}^1 + k_1\, k_i\, \tilde{p}^i = -\tilde{p}^1 - k_1\, \tilde{p}_0 \end{gathered} \tag{27}$$

ecc.

Sarebbe abbastanza semplice se ci si potesse fermare qui. Ma nelle eq. di Maxwell ci sono le derivate rispetto alle coordinate, e questo complica le cose: Minkowski non basta più, ci vuole Levi-Civita e la "derivata covariante"... Vedremo più avanti.

Significato "fisico" delle componenti di un vettore (o di un tensore)

Nasce facilmente una domanda: se si lavora in coord. generali, sia pure di forma non troppo generale — come le $\tilde{x}^\lambda$ definite nelle (18) — quali fra le componenti, covarianti o controvarianti, di un vettore o di un tensore, corrispondono alle grandezze fisiche? La risposta è "in generale, nessuna delle due."

Prima di giustificare la mia affermazione, faccio notare che questo è un punto di netto dissenso rispetto alla posizione per es. di Anderson et al. [2]. Ma l'avevo già scritto: ora si tratta di motivare l'affermazione.

In realtà ci vuole poco: la cosa è implicita fin dall'origine della discussione sulla sicron. Un *evento* è un punto nello spazio-tempo. La scelta di un *riferimento* (inerziale) K, [5] ossia di un corpo *rigido* [6] quale sono fissati gli strumenti di misura che definiscono operativamente tutte le grandezze fisiche, permette in primo luogo di scegliere (in infiniti modi) delle coord. spaziali *ortogonali isometriche* (brevemente, coordinate *cartesiane*). Il secondo passo, come abbiamo già discusso, è la scelta di una *sincronizzazione*, quindi di una coord. temporale. Con ciò nel rif. K è stato definito un SC spazio-temporali.

Fissato un SC, a ogni evento sono associati 4 numeri reali (le sue coordinate). Se chiamiamo "simultanei" due eventi quando hanno uguale la coord. $\tilde{x}^0$, è banale che la definizione di simultaneità dipende dalla scelta della sincron., ossia — nel linguaggio qui adottato — dalla scelta del vettore $\mathbf{k}$ nella trasf. di coordinate (18).

Tornando alla domanda iniziale, la risposta è ovvia se si tiene presente il criterio generale che ho già scritto e che ora ripeto mettendolo in evidenza:

Le grandezze aventi significato fisico sono necessariamente invarianti, quindi indipendenti da basi e coordinate.

Le componenti di un vettore (o di un tensore) nel caso generale non soddisfano questo criterio. Però nel nostro caso, in cui la trasf. di coord. è molto particolare, si può dire qualcosa di più, in senso positivo.

Esempio dell'impulso energia

Abbiamo già visto che le coord. spaziali sono invarianti, e per la stessa ragione lo sono anche componenti controvarianti spaziali dell'impulso-energia:

$$\tilde{p}^i = p^i.$$

Invece

$$\tilde{p}^0 = m\,\frac{d\tilde{x}^0}{d\tau} = m\,\frac{dx^0}{d\tau} + m\,k_i\,\frac{dx^i}{d\tau} = p^0 + k_i\,p^i$$

che è la stessa trasf. (21), applicata a $\tilde{p}^0$ invece che a $\tilde{x}^0$. Dunque la parte spaziale (impulso) non dipende dalla sincron. e ha significato fisico, mentre la parte temporale non lo ha. (Questo è ovvio, se si pensa che le componenti controvarianti di un 4-vettore si trasformano come le coord.)

Ancora: le (27) mostrano che le componenti covarianti $\tilde{p}_i$ dipendono dalla sincron. e quindi non hanno significato fisico; invece $\tilde{p}_0 = p_0$.

---

[5] Tralascio di esaminare qui come si decide se un rif. è inerziale.

[6] Anche la questione della rigidità, in particolare se si possa stabilire che un corpo è rigido senza aver preliminarmente convenuto una sincron., non posso affrontarla, per limiti di spazio e di tempo. Accenno solo che sarei orientato a pensare che la rigidità non richieda logicamente la sincron.

Conclusione: per un 4-vettore hanno signifcato fisico la componente *covariante temporale* e le componenti *controvarianti spaziali.*

È interessante il caso particolare di una particella di massa nulla. In SS si ha $p_0 = p$, dove ho posto

$$p = \sqrt{(p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2}.$$

Ovviamente non vale $\tilde{p}^0 = \tilde{p}$, mentre vale $\tilde{p}_0 = \tilde{p}$ (con la stessa definizione per $\tilde{p}$). Se invece definissi $\tilde{p}$ con le componenti *covarianti* $\tilde{p}_i$, non potrei scrivere $\tilde{p}_0 = \tilde{p}$.

La velocità

Vediamo un altro caso importante: la velocità. La sua definizione usuale è

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}.$$

Se tentiamo la stessa definizione con le nuove coord. abbiamo

$$\tilde{v}^i = \frac{d\tilde{x}^i}{du} = \frac{dx^i}{dt + k_j\,dx^j} = \frac{v^i}{1 + k_j v^j}.$$

Anche la velocità non è invariante, e quindi non ha significato fisico. Consideriamo però la trasformata di $w^i = -v^i$:

$$\tilde{w}^i = \frac{w^i}{1 + k_j w^j} = -\frac{v^i}{1 - k_j v^j}.$$

Quindi per i moduli $\tilde{v}$, $\tilde{w}$:

$$\begin{gathered} \tilde{v} = \frac{v}{1 + k_j v^j} \qquad \tilde{w} = \frac{v}{1 - k_j v^j} \\ \frac{1}{\tilde{v}} + \frac{1}{\tilde{w}} = \frac{2}{v}\,. \end{gathered} \tag{28}$$

Le (28) mostrano:

1) che la velocità media nel percorso di andata e ritorno è sempre v

2) che se $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} > 0$, in andata $\tilde{v} > v$, in ritorno $\tilde{w} < v$.

Inutile dire che le (28) valgono anche se $v = 1$ (velocità della luce).

Equazioni di Maxwell in forma covariante

Cominciamo con un riassuntino della forma tensoriale delle eq. di M. (per ora assumo coordinate minkowskiane). Il *tensore elettromagnetico* $F_{\alpha\beta}$ (o anche $F^{\alpha\beta}$), antisimmetrico, è così definito in termini delle componenti cartesiane dei campi $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ (siamo nel vuoto, unità di Gauss):

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & B^z & -B^y \\ E^z & -B^z & 0 & B^x \\ E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix} \\ F^{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{29}$$

La *quadricorrente* J^α è definita da

$$J^0 = \varrho \qquad J^1 = j^x \qquad \text{ecc.}$$

Con queste posizioni le eq. di M. si scrivono

$$\begin{gathered} F^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 4\pi J^\alpha \\ F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0. \end{gathered} \tag{30}$$

Nelle (30) la virgola sta a indicare derivata parziale: per es.

$$F_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}.$$

La trascrizione delle (30) in coordinate generali richiederebbe l'uso delle *derivate covarianti*, ma per fortuna non è il nostro caso. Dato che le componenti del tensore metrico (24) sono costanti, le derivate covarianti coincidono con le comuni derivate parziali. Perciò nel seguito potremo ancora usare le (26).

C'è un'importante implicazione di questo fatto. Ricordo che la seconda delle (30) equivale alle due equazioni omogenee di M. Dunque queste rimangono inalterate anche nelle coordinate (u, x, y, z):

$$\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \qquad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{B}} = 0$$

dove ho indicato con $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ i vettori campo elettrico e campo magnetico in quelle coordinate, intesi come legati al tensore e.m. da equazioni analoghe alle (29), in particolare

$$\tilde{E}^x = \tilde{F}_{10} \quad \cdots \quad \tilde{B}^x = \tilde{F}_{23} \quad \cdots \tag{31}$$

Si noti però che la relazione di $\tilde{\mathbf{E}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}$ con la forma controvariante di $\tilde{F}$ è ben più complicata, visto che

$$\tilde{F}_{\lambda\mu} = \tilde{g}_{\lambda\nu}\, \tilde{g}_{\mu\pi}\, \tilde{F}^{\nu\pi}$$

con $\tilde{g}_{\lambda\mu}$ dato dalla (22).[5]

[5] Però attenzione: rimane da chiarire il significato fisico di questi vettori $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$.

Invece la prima delle (30) va scritta per esteso. Cominciamo col trasformarla mediante le conponenti covarianti di $\tilde{F}$:

$$\tilde{g}^{\lambda\nu}\,\tilde{g}^{\mu\pi}\tilde{F}_{\nu\pi,\mu} = 4\pi\tilde{J}^{\lambda}.$$

o anche

$$\tilde{g}^{\mu\pi}\tilde{F}_{\lambda\pi,\mu} = 4\pi\,\tilde{J}_{\lambda} \tag{32}$$

che contiene solo la forma covariante di $\tilde{F}$, come si voleva.

Scriviamo la (32) per $\lambda = 0$:

$$\tilde{g}^{\mu i}\tilde{F}_{0i,\mu} = 4\pi\,\tilde{J}_0$$

e usando la (25)

$$-k_i\tilde{F}_{0i,0} - \tilde{F}_{01,1} - \tilde{F}_{02,2} - \tilde{F}_{03,3} = 4\pi\,\tilde{J}_0$$

o anche, dalle (31)

$$k_i\,\tilde{E}^i{}_{,0} + \tilde{E}^1{}_{,1} + \tilde{E}^2{}_{,2} + \tilde{E}^3{}_{,3} = 4\pi\,\tilde{J}_0$$

$$-\mathbf{k}\cdot\frac{\partial\tilde{\mathbf{E}}}{\partial u} + \operatorname{div}\tilde{\mathbf{E}} = 4\pi\,\tilde{J}_0$$

dove $\tilde{\mathbf{E}}$ è il vettore spaziale le cui componenti controvarianti sono le $\tilde{E}^i$.

Calcoliamo $\tilde{J}_0$:

$$\tilde{J}_0 = \tilde{g}_{0\mu}\tilde{J}^{\mu} = \tilde{J}^0 + k_i\,\tilde{J}^i = \tilde{\varrho} - \mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{j}}.$$

Ne segue

$$\operatorname{div}\tilde{\mathbf{E}} - \mathbf{k}\cdot\frac{\partial\tilde{\mathbf{E}}}{\partial u} = 4\pi\,(\tilde{\varrho} - \mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{j}}).$$

Dunque questa eq. di M. non resta invariata.

Poniamo ora $\lambda = 1$. Anche in questo caso si ha una semplificazione, perché l'indice ϱ può essere soltanto 0:

$$\tilde{g}^{\mu\pi}\tilde{F}_{1\pi,\mu} = 4\pi\,\tilde{J}_1$$

$$\tilde{g}^{\mu 0}\tilde{F}_{10,\mu} + \tilde{g}^{\mu 2}\tilde{F}_{12,\mu} + \tilde{g}^{\mu 3}\tilde{F}_{13,\mu} = 4\pi\,\tilde{J}_1$$

$$\tilde{g}^{\mu 0}\tilde{E}^x{}_{,\mu} + \tilde{g}^{\mu 2}\tilde{B}^z{}_{,\mu} - \tilde{g}^{\mu 3}\tilde{B}^y{}_{,\mu} = 4\pi\,\tilde{J}_1$$

Bibliografia

[1] R. Anderson, G.E. Stedman, *Found. of Phys.* **7** (1977), 29.

[2] R. Anderson *et al.*, *Phys. Rep.* **295** (1998), 93.

[3] Si veda per es. `http://www.sagredo.eu/irg/irg09.pdf`

[4] E. Minguzzi, *Found. Phys. Lett.* **15** (2002), 153.